МФТИ, 1 курс, 11–12 ноября 2019 года

Практикум по Введению в математический анализ.

1.1. Доказать асимптотические неравенства для натуральных n, m при $x \to 0$.

$$a)\ x^{n+1} = o(x^n), \quad b)\ o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m}), \quad c)\ o(x^n) + o(x^m) = o(x^{\min\{n,m\}})$$

1.2. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ функцию

$$f(x) = \frac{1}{1 - x + x^2 - x^3}$$

1.3. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^{2n})$ функцию

$$f(x) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 2x$$

2.1. Верны ли утверждения

$$a) \quad e^x = 1 + o(1) \text{ при } x \to 0$$

$$b) \quad e^{\sin x} = 1 + o(1) \text{ при } x \to 0$$

$$c) \quad e^{\cos x} = 1 + o(1) \text{ при } x \to 0$$

2.2. Разложить по формуле Тейлора в точке $x_0 = -2$ до $o(x^n)$ функцию

$$f(x) = (x^2 + 4x + 7)e^{x/2}$$

2.3. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^5)$ функцию

$$f(x) = \ln \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

2.4. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ при наибольшем возможном n функцию

$$f(x) = |\sin x - x|$$

3.1. Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Верно ли, что

$$a) \text{ из } f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \text{ следует } f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}}{k} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)?$$

$$b) \text{ из } f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \text{ следует } f'(x) = \sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)?$$

3.2. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$$