

Практикум по курсу Введение в математический анализ
Действительные и комплексные числа, 09.09.2019, 10.09.2019

1.1. Доказать, что числа $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ иррациональные.

1.2. Вычислить сумму $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$.

1.3. Найти частное z_2/z_1 комплексных чисел $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 4 - 2i$.

1.4. Найти множество всех таких точек комплексной плоскости, что $|z - 1 - i| \leq 1$, а аргумент φ числа z удовлетворяет неравенствам $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2$.

1.5. Представить комплексные числа а) $1 + i$; б) $3e^{-\pi i/3}$ в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2.1. Доказать равенство $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

2.2. Представить комплексные числа в алгебраической и тригонометрической формах:

$$\text{а) } \frac{(\sqrt{3}i - 1)^7}{(1 + i)^3}; \quad \text{б) } \left(\sin \frac{6\pi}{5} + i \left(1 + \cos \frac{6\pi}{5} \right) \right)^5.$$

2.3. Найти все комплексные корни уравнения:

$$\text{а) } z^2 + 2z + 7 = 0; \quad \text{б) } z^2 + \bar{z} - |z|^2 = -4; \quad \text{в) } z^5 = \sqrt{3}i - 1.$$

3.1. Доказать неравенства:

$$\text{а) } |x| - (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) \leq |x + x_1 + x_2 + \dots + x_n|;$$

$$\text{б) } \left| \sin \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \sin x_k, \quad 0 \leq x_k \leq \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

3.2. Доказать тождество $\left(\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha} \right)^n = \frac{1 + i \operatorname{tg} n\alpha}{1 - i \operatorname{tg} n\alpha}$.

3.3. Пусть $c \in \mathbb{C}$ и $|c| > 1$. Найти геометрическое место всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$z\bar{z} + (c\bar{z} + \bar{c}z) + 1 = 0.$$