Спецкурс:

Функциональный анализ

Константинов Роман Викторович

Аннотация:

Излагаются фундаментальные вопросы функционального анализа необходимые современному инженеру-исследователю: топологические и метрические пространства, нормированные векторные пространства, пространства интегрируемых по Лебегу функций, элементы теории линейных операторов в линейных нормированных пространствах, элементы теории банаховых алгебр и спектральная теорема для нормальных операторов в гильбертовом пространстве.

Программа:

1. Частично упорядоченные множества

Аксиома выбора. Лемма о неподвижном множестве. Частично упорядоченные множества. Теорема Хаусдорфа о максимальности и лемма Цорна.

2. Топологические пространства, база и предбаза топологии

Топологические пространства, база и предбаза топологии. Критерии базы и предбазы для семейства подмножеств. Топологические и секвенциальные определения замкнутости и замыкания множеств топологического пространства и связь между ними, аксиома счётности. Топологическое и секвенциальное определение непрерывности отображения топологических пространств и связь между ними. Декартово произведение топологических пространств и топология Тихонова в нем.

3. Метрические пространства, полнота, сепарабельность, пополнение

Метрическое пространство и метрическая топология. Примеры неметризуемых топологий. Полнота метрического пространства, принцип вложенных шаров и теорема Бэра. Сепарабельность метрического пространства, критерий несепарабельности. Пополнение неполного метрического пространства. Теорема Хаусдорфа о существовании пополнения. Принцип Банаха сжимающих отображений в полном метрическом пространстве.

4. Компактные множества в топологических и метрических пространствах

Топологическая, счётная и секвенциальная компактность множеств топологического пространства и связь между ними. Теорема Александера о предбазе и теорема Тихонова о топологической компактности декартова произведения компактных топологических пространств. Вполне ограниченность множества метрического пространства. Критерий Фреше топологической и секвенциальной компактности множества в метрическом пространстве. Критерии вполне ограниченности множеств в малых лебеговых пространствах. Теорема Арцела–Асколи о вполне ограниченности множества из пространства непрерывных функций, заданных на метрическом компакте.

5. Линейные нормированные пространства и пространства интегрируемых по Лебегу функций

Линейные нормированные пространства. Лемма Рисса о почти перпендикуляре и теорема Рисса о не вполне ограниченности сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном линейном пространстве. Полнота конечномерного подпространства линейного нормированного пространства. Пространства интегрируемых по Лебегу функций, их полнота и сепарабельность. Критерий Рисса–Колмогорова о вполне ограниченности множества в пространствах интегрируемых по Лебегу функций.

6. Евклидовы и гильбертовы пространства

Евклидовы и гильбертовы пространства. Равенство параллелограммов. Теорема о существовании единственной метрической проекции вектора на выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве. Ортогональное дополнение подпространства евклидова пространства. Теорема о разложении гильбертова пространства в прямую сумму замкнутого подпространства и его ортогонального дополнения. Полная ортогональная система векторов и ортогональный базис в гильбертовом пространстве. Критерий полноты ортогональной системы векторов в гильбертовом пространстве.

7. Линейные операторы в линейных нормированных пространствах, норма оператора

Линейные операторы в линейных нормированных пространствах, норма оператора. Пространство линейных ограниченных операторов, нормированное операторной нормой, и его полнота. Теорема Банаха–Штейнгауза и полнота пространства линейных ограниченных операторов относительно поточечной сходимости. Обратный оператор, критерий ограниченности обратного оператора. Теоремы Банаха об открытом отображении, об обратном операторе и о замкнутом графике. Компактные операторы, компактность конечномерного линейного непрерывного оператора. Теорема о приближении компактного оператора конечномерным линейным непрерывным оператором по операторной норме.

8. Сопряжённое пространство, теоремы Хана–Банаха и Рисса–Фреше

Сопряжённое пространство к линейному нормированному пространству. Теорема Хана–Банаха и её следствия. Теорема об отделимости выпуклых множеств в линейном нормированном пространстве. Теорема Рисса–Фреше об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве. Рефлексивные и нерефлексивные пространства. Рефлексивность гильбертова пространства. Вычисление сопряженного пространства для пространства интегрируемых по Лебегу функций. Исследование рефлексивности пространств интегрируемых по Лебегу функций.

9. Слабая и слабая* топология

Слабая топология и слабая сходимость в линейном нормированном пространстве. Теорема Мазура о б эквивалентности сильной и слабой замкнутости выпуклого множества линейного нормированного пространства и её следствия. Критерий слабой сходимости последовательности в линейном нормированном пространстве. Метризуемость слабой топологии на шаре линейного нормированного пространства. Пример фон Неймана неметризуемости слабой топологии на всём пространстве. Слабая* топология и слабая* сходимость в сопряжённом пространстве. Критерий слабой*-непрерывности линейного функционала, действующего на сопряжённом пространстве. Критерий слабой* сходимости последовательности в сопряжённом пространстве. Метризуемость слабой* топологии на шаре сопряжённого пространства. Теорема Банаха–Алаоглу и слабая компактность замкнутого шара в рефлексивном нормированном пространстве.

10. Сопряжённые операторы, спектр оператора

Оператор, сопряжённый к линейному ограниченному оператору. Равенство норм линейного ограниченного оператора и его сопряжённого. Аннуляторы подпространств линейного нормированного пространства и его сопряжённого, и их свойства. Теоремы Фредгольма о связи ядра и множества значений оператора и его сопряжённого. Резольвента и резольвентное множество линейного ограниченного оператора в банаховом пространстве. Тождество Гильберта и аналитические свойства резольвенты. Спектр линейного ограниченного оператора в банаховом пространстве и его компоненты. Теорема о непустоте и компактности спектра. Спектральный радиус линейного ограниченного оператора. Теорема о спектральном радиусе.

11. Компактные операторы, теоремы Фредгольма, спектр компактного оператора

Теорема об эквивалентность компактности линейного оператора оператора и компактности его сопряжённого. Четыре теоремы Фредгольма для компактных операторов в банаховом пространстве. Теорема о спектре компактного оператора.

12. Самосопряжённые операторы, теорема Гильберта–Шмидта

Самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве. Вещественность спектра самосопряжённого оператора. Теорема о равенстве спектрального радиуса норме самосопряжённого оператора. Критерий принадлежности числа спектру самосопряжённого оператора. Компактные самосопряжённые операторы. Теорема Гильберта–Шмидта о существовании ортогонального базиса из собственных векторов компактного самосопряжённого оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве. Вычисление резольвенты компактного самосопряжённого оператора.

13. Банаховы алгебры, спектр элемента банаховой алгебры, группа обратимых элементов банаховой алгебры

Банаховы алгебры, пространство линейных непрерывных операторов в нормированном пространстве как банахова алгебра. Спектр и резольвента элемента банаховой алгебры, непустота и компактность спектра. Теорема о спектральном радиусе. Группа обратимых элементов банаховой алгебры и ее свойства. Теорема Гельфанда–Мазура.

14. Коммутативные банаховы алгебры, максимальные идеалы и комплексные гомоморфизмы, преобразование Гельфанда и теорема Гельфанда – Наймарка

Коммутативные банаховы алгебры, идеалы и комплексные гомоморфизмы в коммутативной банаховой алгебре. Множество максимальных идеалов и его связь с множеством комплексных гомоморфизмов коммутативной банаховой алгебры. Теорема о спектре элемента коммутативной банаховой алгебры и преобразование Гельфанда. Инволюция и B*–алгебры, теорема Гельфанда–Наймарка. Эрмитовы (самосопряженные) элементы B*–алгебры и их спектральные свойства.

15. Спектральная теорема для нормального оператора в гильбертовом пространстве

Пространство линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве как B*–алгебра. Ограниченные нормальные, самосопряженные, унитарные операторы. Ортогональные проекторы в гильбертовом пространстве. Разложения единицы. Спектральная теорема для нормальных операторов в гильбертовом пространстве. Функциональное исчисление нормальных операторов. Критерий собственного значения нормального оператора и свойства собственных векторов нормального оператора со счетным спектром.