

**Спецкурс:**

# **Теория псевдодифференциальных операторов**

**Арутюнов А.А.**

**Программа:**

**1. Основные функциональные пространства:  $L_2$ , пространство Шварца, сходимости в этих пространствах**

Нормы, полунормы. Индуцируемые ими топологии. Понятие сходимостей. Топологии основных пространств и вводимые там системы норм и полунорм:  $L_2$ ,  $L_p$ , пространство Шварца, функции с финитным носителем.

**2. Преобразование Фурье, ряды Фурье, тождество Парсеваля, дифференциальные операторы как интегральные**

Преобразование Фурье на пространстве Шварца, разложение в ряды Фурье. Коэффициенты рядов Фурье. Основные свойства преобразования Фурье: дифференцирование Фурье-образа, умножение на мономы, сжатие, трансляция, свёртка и т. п. Доказательство тождества Парсеваля. Сведение дифференциальных операторов к интегральным, предделение ядра соответствующих интегральных операторов.

**3. Теорема Котельникова (Найквеста-Шеннона) и формула Пуассона**

Доказательство формулы Пуассона, проверка основных свойств коэффициентов Фурье. Отождествление функций с финитным носителем и периодических. Применение формулы Пуассона к теории вероятности. Доказательство теоремы Котельникова и анализ её прикладного значения.

**4. Пространство обобщенных функций, обобщенная производная, сингулярные носители**

Пространство обобщенных функций как функционалов над финитными. Сходимость, таких функций. Вложение пространства гладких функций, перенос стандартных операций: дифференцирование, преобразование Фурье. Определение сингулярного носителя обобщенной функции. Примеры.

**5. Пространство символов  $S^m$ , полиоднородные символы, асимптотические разложения**

Пространство символов, введение фильтрации порядком на нём. Понятие асимптотического разложения, теорема об определении символа по асимптотическом расслоению. Полиоднородные символы. Примеры не полиоднородных символов, а также символов без асимптотического разложения. Дробная степень оператора Лапласа, как главный модельный пример.

**6. Дифференциальные и псевдодифференциальные операторы, и их символы. Сопряженные, транспонированные операторы, дуальный символ**

Определение пространства псевдодифференциальных операторов заданного порядка. Вложение алгебры дифференциальных операторов в алгебру ПДО. Символы дифференциальных операторов и их связь с характеристическим многочленом. Сопряжение и транспонирование операторов, доказательство инволютивности. Определение дуальной формы записи операторов. Теорема об асимптотическом разложении ПДО заданного своей амплитудой.

**7. Формула композиции, параметрикс. Символьное исчисление. Порядок операторов, действие в операторов в соболевских пространствах. Эллиптические оператор**

Доказательство теоремы о композиции ПДО. Парметрикс как квазиобратный оператор, построение его формулы. Определение соболевских пространств и теорема об ограниченности ПДО в соответствующих соболевских пространствах. Обратимость ПДО с эллиптическим символом. Понятие бесконечно-сглаживающих операторов. Определение алгебры ПДО.

**8. ПДО на компактных многообразиях. Формула для замены переменной. Фредгольмовы, Нётеровы, операторы. Понятие индекса**

Определение ПДО, действующих в пространстве гладких функций над компактным многообразием. Инвариантность относительно выбора атласа многообразия. Формулировка теоремы о замене переменной в ПДО на многообразии. Определение Фредгольмовых и Нётеровых операторов, понятие индекса для таких операторов. Эллиптичность оператора Лапласа, примеры не эллиптических операторов. Примеры фредгольмовых и не фредгольмовых операторов. Понятие ядра и коядра оператора. Конечномерные примеры.

**9. Теорема Атьи-Зингера, случай некомпактных многообразий, понятие некоммутативной геометрии.**

Формулировка теоремы Атьи-Зингера на компактных многообразиях. Минимальный набор сведений о К-теории. Исследование дальнейших направлений развития теории ПДО: задача томографии, вторичное квантование. Математические идеи развития: нелокальные ПДО, устойчивость решений.