

Дополнительные главы алгебры

А. В. Ершов

В курсе будет рассказано про основные понятия и методы алгебры. Курс будет сопровождаться примерами и задачами для самостоятельного решения. Лекции будут проходить по понедельникам, в ауд. 515 ГК, с 12:20 до 13:45.

I Теория групп:

- 1) Группы, подгруппы. Гомоморфизмы групп, их ядра и образы.
- 2) Порядок элемента группы. Циклические группы, свойства их подгрупп.
- 3) Смежные классы, теорема Лагранжа. Нормальные подгруппы как ядра гомоморфизмов. Факторгруппа. Теорема о гомоморфизме групп.
- 4) Действия групп, орбиты и стабилизаторы. Примеры действий. Формула орбит. Формула Бернсайда.
- 5) Классы сопряженных элементов и централизаторы. Описание классов сопряженных элементов группы преобразований.
- 6) Автоморфизмы групп. Прямые и полупрямые произведения.
- 7) Коммутант, его свойства. Разрешимые группы.
- 8) Теоремы Силова.
- 9) Простые группы. Композиционный ряд, теорема Жордана-Гёльдера (без доказательства).

II Коммутативная алгебра:

- 10) Евклидовы кольца, примеры. Наибольший общий делитель. Разложение на простые множители в евклидовом кольце.
- 11) Идеалы и факторкольца. Кольца главных идеалов. Теорема о гомоморфизме колец.
- 12) Понятие модуля над кольцом, подмодуля, примеры. Теорема о гомоморфизме модулей.
- 13) Классификация с точностью до изоморфизма конечнопорожденных модулей над евклидовым кольцом. Применение полученных результатов к конечнопорожденным абелевым группам и жордановой нормальной форме.
- 14) Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
- 15) Алгебраические расширения полей и целые расширения колец.
- 16) Разложение на простые множители в кольцах, факториальные кольца.

III Некоммутативные кольца. Теория представлений:

- 17) Некоммутативные кольца, примеры (кольцо эндоморфизмов модуля, групповая алгебра конечной группы, тела, в частности, тело кватернионов). Левые, правые, двусторонние идеалы.

- 18) Модули над некоммутативными кольцами.
- 19) Тензорное произведение модулей, определение через универсальное свойство и конструкция.
- 20) Простые модули. Лемма Шура. Длина модуля. Теорема Жордана-Гёльдера.
- 21) Полупростые модули и кольца. Теорема Веддербёрна о полупростых кольцах конечной длины.
- 22) Полупростота групповой алгебры конечной группы. Применение развитой ранее теории к линейным представлениям конечных групп.

Литература:

- Винберг Э. Б. “Курс Алгебры”, М.: МЦНМО, 2013
Ленг С. Алгебра, М.: Мир, 1968
Шафаревич И. Р. “Основные понятия алгебры”, М.: URSS, 2019