

Группы Ли и алгебры Ли

Штепин В.В.

1. Понятия ассоциативной алгебры и алгебры Ли. Дифференцирование. Матрицы Паули. Топологические пространства. База топологии. Топологические группы. Многообразия. Примеры многообразий. Группы Ли. Задание структуры группы Ли на алгебраическом многообразии. Группа Лоренцева преобразования.

2. Построение алгебры Ли группы Ли. Геометрический смысл алгебры Ли группы Ли. Векторные поля на многообразии. Скобка Ли векторных полей. Построение алгебры Ли группы Ли. Подмногообразия и подгруппы Ли. Классические группы Ли преобразований и их алгебры Ли.

3. Представления групп и алгебр Ли. Примеры представлений и их простейшие свойства. Соответствие нормальной подгруппы идеалу. Классификация алгебр Ли на основе присоединенного представления. Разрешимые и нильпотентные группы и алгебры Ли. Вклад Абеля в теорию алгебраических уравнений. Критерий разрешимости. Разрешимость динамической системы в квадратурах. Теорема Ли и следствия из нее. Теорема Энгеля. Билинейная форма Киллинга и ее свойства. Существование интегрального инварианта.

4. Динамические системы. Группы и алгебры Ли симметрий динамических систем. Интегрируемость в квадратурах динамической системы в n -мерном фазовом пространстве, допускающей n -мерную разрешимую группу Ли симметрий. Гамильтоновы системы. Теорема Лиувилля. Возмущение уравнений Гамильтона. Множество Пуанкаре. Теорема Пуанкаре о несуществовании аналитического интеграла возмущенной системы. Теория малого параметра Пуанкаре.

Весы и корни представлений алгебр Ли. Корни и корневые подпространства алгебры Ли относительно нильпотентной подалгебры. Корневое разложение и его свойства. Подалгебры Картана. Достаточное условие разрешимости группы или алгебры Ли. Критерий Картана. Фундаментальная система корней и \mathfrak{h} -система. Классификация \mathfrak{h} -систем и схемы Дынкина. Классификация Картана простых алгебр Ли. Исключительные алгебры Ли.