

Экзаменационная программа
Введение в математический анализ
осенний семестр 2017–2018 учебного года
(для ФОПФ)

- (1) Натуральные, целые, рациональные числа.
- (2) Основные понятия теории множеств. Объединение, пересечение и декартово произведение. Отображения и последовательности.
- (3) Пределы и фундаментальные последовательности рациональных чисел, определение действительных чисел.
- (4) Арифметические операции и сравнение действительных чисел.
- (5) Предел последовательности действительных чисел. Полнота множества действительных чисел (критерий Коши).
- (6) Бесконечные пределы. Существование предела монотонной последовательности.
- (7) Переход к пределу в неравенствах, единственность предела последовательности.
- (8) Существование общей точки последовательности вложенных отрезков. Единственность общей точки для стягивающейся последовательности.
- (9) Точные грани числовых множеств: определение, существование и единственность. Другие определения действительных чисел.
- (10) Бесконечно малые последовательности и их свойства. Предел суммы, разности, произведения и частного.
- (11) Неравенство Бернулли, экспонента и логарифм.
- (12) Тригонометрические функции, их определение и свойства. Неравенства $|\sin t| < |t| < |\operatorname{tg} t|$ при $0 < |t| < \frac{\pi}{2}$.
- (13) Частичные пределы, верхний и нижний пределы. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Теорема о единственном частичном пределе.
- (14) Топология на множестве действительных чисел. Открытые, замкнутые и компактные множества. Критерий компактности.
- (15) Биекции и мощность множеств. Сравнение мощностей.
- (16) Теоремы о счётности множества \mathbb{Q} рациональных чисел и несчётности множества \mathbb{R} действительных чисел.
- (17) Непрерывность функции в точке. Определение по Коши и по Гейне.
- (18) Непрерывность суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций.
- (19) Теорема о непрерывности композиции функций.
- (20) Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции.
- (21) Непрерывность монотонного отображения промежутка на промежуток. Непрерывность обратной функции.
- (22) Топологическое определение непрерывности функции и его эквивалентность другим определениям.
- (23) Свойства функций, непрерывных на компактных множествах.
- (24) Два определения предела функции (по Коши и по Гейне). Их эквивалентность.
- (25) Свойства пределов функций, связанные с неравенствами и арифметическими операциями.
- (26) Односторонние пределы. Теорема об односторонних пределах монотонных функций.
- (27) Критерий Коши существования предела функции.
- (28) Сравнение асимптотического поведения функций. Порядок функции, асимптотическая эквивалентность, символы o и O .
- (29) Определение и геометрический смысл производной. Производные функций $\sin x$, $\cos x$, a^x , $\log_a x$.

- (30) Линейное приближение и дифференциал функции. Непрерывность дифференцируемой функции.
- (31) Производная суммы, разности, произведения и частного.
- (32) Производная композиции функций. Производная функции x^α . Инвариантность формы первого дифференциала.
- (33) Производная обратимой функции. Производные обратных тригонометрических функций. Производная функции, заданной параметрически.
- (34) Локальные экстремумы. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля.
- (35) Теоремы Лагранжа и Коши о среднем значении.
- (36) Условия постоянства, возрастания и убывания дифференцируемой функции.
- (37) Необходимые и достаточные условия экстремума дифференцируемой функции.
- (38) Достаточное условие выпуклости дифференцируемой функции.
- (39) Правило Лопиталья раскрытия неопределённостей вида $0/0$.
- (40) Правило Лопиталья раскрытия неопределённостей вида ∞/∞ .
- (41) Формула Лейбница для n -й производной произведения двух функций.
- (42) Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
- (43) Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
- (44) Разложения по формуле Тейлора элементарных функций: e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.
- (45) Евклидовы n -мерные пространства. Неравенства Коши–Шварца и треугольника. Пределы последовательностей точек евклидова пространства.
- (46) Открытые и замкнутые множества в евклидовом пространстве и их свойства.
- (47) Внутренность, замыкание и граница множества. Открытость внутренности. Замкнутость замыкания и границы.
- (48) Индуцированная топология на подмножествах евклидова пространства, относительно замкнутые и открытые множества.
- (49) Связные множества. Описание связных подмножеств числовой прямой.
- (50) Компактные множества и критерий компактности в евклидовом пространстве.
- (51) Секвенциальная компактность ограниченных и замкнутых множеств в евклидовом пространстве.
- (52) Расстояние между точкой и множеством и между двумя множествами. Достаточное условие достижимости расстояния между множествами в евклидовом пространстве.
- (53) Непрерывные отображения. Определение непрерывности в точке по Коши и по Гейне. Топологическое определение непрерывности.
- (54) Свойства непрерывных отображений на компакте и на связных множествах.
- (55) Кривые в пространстве и их конкатенация. Линейная связность, её сравнение со связностью и сохранение линейной связности при непрерывных отображениях.
- (56) Равномерно непрерывные отображения, модуль непрерывности. Теорема о равномерной непрерывности отображения на компакте.
- (57) * Полунепрерывные функции, достаточные условия достижимости минимума на компакте.
- (58) Определение и свойство аддитивности длины дуги кривой.
- (59) Непрерывная зависимость длины дуги кривой от параметра, натуральная параметризация кривой.
- (60) Спряжляемость непрерывно дифференцируемой кривой. Производная длины дуги по параметру и её физический смысл.
- (61) Кривизна и формулы Френе для плоской кривой. Радиус кривизны, центр кривизны и эволюта.

- (62) Кривизна, главная нормаль и бинормаль кривой в \mathbb{R}^3 . Крочение и формулы Френе для кривой ненулевой кривизны.
- (63) Теорема о существовании комплексного корня многочлена с комплексными коэффициентами.
- (64) Деление многочленов с остатком. Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя многочленов. Разложение рациональной функции на элементарные дроби.