

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА
по курсу «Аналитическая геометрия»
1 курс, осенний семестр, 2017/2018 уч.г.
(ФОПФ)

I. Введение. (Поток Кожевникова П.А.)

Матрицы и детерминанты малых размеров. Системы линейных уравнений. Множества. Логика. Индукция.

II. Векторы и декартовы системы координат (ДСК) на плоскости и в пространстве.

1. Линейные операции с векторами и их свойства. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Связь между линейной зависимостью, коллинеарностью и компланарностью векторов. Базис, координаты вектора в базисе. Изменение координат при замене базиса.
2. Скалярное произведение, его свойства. Проекция вектора на направление. Выражение скалярного произведения в ортонормированном и произвольном базисе. Вычисление длины вектора и угла между векторами.
3. Левые и правые тройки векторов. Ориентированный объём параллелепипеда (смешанное произведение). Свойства смешанного произведения. Выражение смешанного произведения в произвольном базисе. Критерий компланарности.
4. Векторное произведение, его свойства, выражение в правом ортонормированном базисе. Вычисление площадей, перпендикуляр к паре векторов. Двойное векторное произведение.
5. Общая декартова система координат, прямоугольная система координат. Замена декартовой системы координат, формулы перехода. Полярная, цилиндрическая, сферическая системы координат.

III. Многочлены-1.

1. $\mathbb{R}[X]$. Степень многочлена. Сложение, умножение, деление с остатком.
2. Корни многочлена. Теорема Безу. Кратность корня, число корней с учетом кратности не превосходит степени. Формальное и функциональное равенство многочленов. Теорема Виета.
3. Многочлены от нескольких переменных. Степень, ее инвариантность относительно линейной замены. Лемма о старшем члене.
4. Понятие уравнения множества. Алгебраические множества (линии и поверхности); пересечение и объединение алгебраических множеств.

Порядок, сохранение порядка при переходе к другой системе координат. Пересечение алгебраического множества с прямой и с плоскостью.

IV. Системы координат. Прямые и плоскости. Эллипс, гипербола, парабола. Поверхности.

1. Прямая на плоскости, различные способы задания, их эквивалентность. Линейное неравенство. Пучок прямых. Формула расстояния от точки до прямой.
2. Плоскость в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Взаимное расположение двух и трех плоскостей. Линейное неравенство. Пучок плоскостей. Формула расстояния от точки до плоскости.
3. Прямая в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Взаимное расположение двух прямых. Формулы для расстояния от точки до прямой (в пространстве) и между скрещивающимися прямыми.
4. Эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения. Теоремы о фокусах и директрисах. Касательные. Оптическое свойство.
5. Цилиндрические, конические поверхности, поверхности вращения. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды. Прямолинейные образующие.

V. Матрицы. Элементарные преобразования.

1. Сложение матриц, умножение матрицы на число. Транспонирование. След матрицы.
2. Линейные комбинации, линейная оболочка систем векторов-столбцов (или матриц). Линейная зависимость. Ранг. Базисная подсистема.
Основная теорема о рангах. Стандартный и треугольный базис в \mathbb{R}^n . Строчный и столбцовый ранг матрицы. Оценка ранга суммы матриц.
3. Умножение матриц, его свойства. Суммирование, его тензорная запись. Отсутствие коммутативности умножения. Единичная матрица. Обратимые матрицы. Ранг произведения.
4. Элементарные преобразования строк и столбцов. Элементарные матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому и упрощенному (улучшенному ступенчатому) виду методом Гаусса.
5. Элементарные преобразования строк не меняют линейных соотношений между столбцами. Инвариантность строчного и столбцового

см / обзор

ранга при элементарных преобразованиях. Теорема о ранге матрицы.

6. Невырожденные матрицы. Критерий обратимости-1 (невырожденность = обратимость). Алгоритм нахождения обратной матрицы элементарными преобразованиями. Базисный минор (невырожденность подматриц на пересечении системы $r = \text{rg } A$ линейно независимых строк и столбцов).

VI. Системы линейных уравнений (СЛУ).

1. СЛУ. Разные виды заданий: матричное уравнение, линейная комбинация столбцов, матрица коэффициентов и расширенная матрица. Критерий совместности Кронекера-Капелли.
2. Однородные СЛУ, фундаментальная система решений (ФСР) и общее решение однородной СЛУ. Структура общего решения СЛУ. Алгоритм решения СЛУ методом Гаусса. Мощность ФСР $= n - \text{rg } A$.
3. Восстановление СЛУ по множеству решений. Любая линейная оболочка — множество решений некоторой однородной СЛУ.

VII. Абстрактные отображения.

Понятие отображения и преобразования. Терминология. Примеры. Отношение эквивалентности. Бинарные операции на множестве.

VIII. Группы.

1. Понятия полугруппы и группы. Абелевы группы. Аддитивная и мультипликативная форма записи. Порядок группы. Определения изоморфизма, гомоморфизма. Прямое произведение (прямая сумма). Обратимые элементы полугруппы. Подгруппы. Порождающие множества.
2. Примеры: числа по сложению и умножению; матрицы по сложению и умножению. Группы преобразований. Понятие действия группы на множестве. Понятие о представлении группы.
3. Порядок элемента. Циклические группы, их классификация. Количество порождающих элементов в $(\mathbb{Z}_n, +)$ равно $\varphi(n)$. Подгруппы циклической группы.
4. Симметрическая группа S_n . Независимые циклы. Число инверсий, четность перестановки. Знакопеременная подгруппа A_n .
5. Левые смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа, ее следствия: порядок элемента — делитель порядка группы; описание групп простого порядка; теоремы Ферма и Эйлера (в теории чисел).

IX. Кольца и поля.

1. Теория делимости в \mathbb{Z} . Простые числа. НОД. Алгоритм Евклида, линейное представление НОД. Разложение на простые множители и его единственность. Китайская теорема об остатках.
2. Арифметика по модулю n . Кольцо \mathbb{Z}_n . $\mathbb{Z}_{km} \cong \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_m$ при $(k, m) = 1$. \mathbb{Z}_n — поле тогда и только тогда, когда n — простое. Характеристика поля.
3. Поле комплексных чисел, сопряжение. Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая запись. Умножение, возведение в степень, обращение. Извлечение корней. Группа корней n -й степени из 1. Матрицы с комплексными коэффициентами. Кольцо Гауссовых чисел. Кватернионы.
4. Кольцо $\mathbb{F}[X]$ многочленов над произвольным полем. Неприводимые многочлены, НОД. Разложение на неприводимые сомножители и его единственность. Неприводимые многочлены над \mathbb{C} и над \mathbb{R} .

X. Определитель.

1. Детерминант (определитель) матрицы как полилинейная и кососимметричная функция столбцов. Явная формула (через элементы матрицы).
2. Изменение определителя при элементарных преобразованиях столбцов. Определитель треугольной матрицы. Критерий обратимости-2 ($\det \neq 0$). Определитель транспонированной матрицы.
3. Определитель произведения матриц. Определитель матрицы с углом нулей. Разложение определителя по строке, столбцу.
4. Правило Крамера для решения СЛУ (с невырожденной матрицей коэффициентов), формула обратной матрицы.