

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА ПО КУРСУ «КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ»,
ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2020–2021 УЧЕБНОГО ГОДА,
БЫВШИЙ ФАКУЛЬТЕТ ОБЩЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

Свёртка и приближение функций бесконечно гладкими

- 1) Свёртка функций и её ассоциативность. Дифференцирование свёртки.
- 2) Бесконечно гладкие функции с компактным носителем, примеры.
- 3) Приближение функции в \mathbb{R}^n (вместе с производными) бесконечно гладкими функциями.

Дифференцируемые отображения и криволинейные системы координат

- 4) Дифференцируемые отображения и производная композиции отображений.
- 5) Теорема о существовании обратного отображения. Локальные системы криволинейных координат.
- 6) Теоремы о системе неявных функций, определяемых системой уравнений (случай гладких уравнений).
- 7) Теорема о расщеплении гладкого отображения на простые гладкие отображения.

Дифференциал, гессиан и исследование функции на экстремум

- 8) Дифференциал функции как линейный функционал. Корректность определения второго дифференциала (гессиана) функции как квадратичной формы на касательных векторах для случая, когда первый дифференциал функции равен нулю.
- 9) Локальные максимумы и минимумы функций многих переменных. Необходимое условие экстремума непрерывно дифференцируемой функции.
- 10) Необходимые и достаточные условия экстремума дважды непрерывно дифференцируемых функций.
- 11) Условные экстремумы. Необходимое условие условного экстремума в терминах первых производных. Метод множителей Лагранжа.
- 12) Необходимые и достаточные условия условного экстремума с использованием вторых производных.

Векторы и дифференциальные формы первой степени

- 13) Касательные векторы к открытому подмножеству \mathbb{R}^n в точке. Определение через дифференцирование функций в точке и явный вид.
- 14) Касательное пространство в точке и дифференциал отображения как отображение касательных пространств. Векторные поля на открытых областях в \mathbb{R}^n .
- 15) Дифференциальные формы первой степени и дифференциалы функций. Замена координат в дифференциальной форме первой степени.

Дифференциальные формы высших степеней

- 16) Дифференциальные формы произвольной степени на открытых множествах в \mathbb{R}^n , их определение и свойства.
- 17) Внешнее умножение дифференциальных форм, нормировка внешнего умножения и координатная запись дифференциальных форм произвольной степени.
- 18) Оператор внешнего дифференцирования d , его аксиоматические свойства, существование, единственность и независимость от выбора криволинейной системы координат в области в \mathbb{R}^n .
- 19) Замена координат в дифференциальной форме и обратный образ дифференциальной формы при гладких отображениях, якобиан замены переменных с точки зрения дифференциальных форм.

Интегрирование дифференциальных форм

- 20) Интегрирование дифференциальной формы n -й степени с компактным носителем по \mathbb{R}^n . Равенство нулю интеграла дифференциала формы с компактным носителем.
- 21) Представление формы n -й степени с компактным носителем в \mathbb{R}^n в каноническом виде с точностью до дифференциала формы с компактным носителем.
- 22) Поведение интеграла от формы с компактным носителем в \mathbb{R}^n при линейной замене координат.

- 23) Гладкое разбиение единицы в окрестности компактного подмножества \mathbb{R}^n , подчинённое покрытию этого множества.
- 24) Поведение интеграла от формы с компактным носителем в области \mathbb{R}^n при гладкой замене координат.
- 25) Формула гладкой замены переменных в интеграле Лебега от функции в \mathbb{R}^n .

Многообразия (с краем) и формула Стокса

- 26) Вложенные многообразия в \mathbb{R}^N и вложенные многообразия с краем. Достаточные условия, когда система уравнений задаёт многообразие.
- 27) * Абстрактное определение гладкого многообразия. Координатные карты, гладкие функции на многообразии и гладкие отображения между многообразиями.
- 28) Дифференциальные формы, векторные поля и оператор d на многообразии.
- 29) Гладкие отображения между многообразиями и параметрически заданные многообразия в \mathbb{R}^N .
- 30) Ориентируемость многообразия в терминах карт, задание ориентации многообразия дифференциальной формой высшей степени.
- 31) Определение интеграла дифференциальной формы по ориентированному многообразию с помощью разбиения единицы и его независимость от разбиения единицы.
- 32) Общая формула Стокса.
- 33) Явный вид частных случаев формулы Стокса в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 . Кусочно-гладкие ориентированные поверхности.
- 34) Независимость интеграла дифференциальной формы по кривой в открытой области в \mathbb{R}^n от пути интегрирования и существование потенциала дифференциальной формы. Необходимое условие существования потенциала.

Элементы дифференциальной топологии

- 35) Замкнутые и точные дифференциальные формы, оператор цепной гомотопии для обратных образов дифференциальных форм.
- 36) Определение когомологий де Рама с произвольным и компактным носителем. Когомологии де Рама \mathbb{R}^n и выпуклых областей в \mathbb{R}^n .
- 37) * Когомологии де Рама с компактным носителем в степени n для n -мерного связного многообразия.
- 38) * Критические и регулярные значения гладкого отображения, теорема Сарда.
- 39) * Геометрическое определение степени собственного отображения и его корректность.
- 40) * Определение степени отображения между многообразиями с помощью интегрирования форм максимальной степени с компактным носителем, сравнение с геометрическим определением.
- 41) Теорема Брауэра о неподвижной точке.
- 42) * Существование нигде не нулевых векторных полей на сфере.

Дифференцирование и интегрирование векторных полей

- 43) Внутреннее дифференцирование и производная Ли дифференциальной формы по векторному полю.
- 44) Производная Ли векторного поля и её свойства. Скобка Ли векторных полей, формула для её вычисления в координатах, её кососимметричность и тождество Якоби.
- 45) Интегрирование векторных полей как решение дифференциального уравнения первого порядка. Выпрямление траекторий и достаточные условия неограниченного продолжения решения дифференциального уравнения на многообразии.
- 46) Однопараметрические группы диффеоморфизмов многообразия, геометрический смысл производной Ли по векторному полю.
- 47) Дивергенция векторного поля на многообразии с формой объёма, её геометрический смысл.

Римановы и полуримановы многообразия

- 48) Риманова структура на многообразии, её существование.
- 49) Риманов объём, произведение римановых многообразий и риманов объём на произведении.

- 50) Риманов объём многообразий в евклидовом пространстве с индуцированной римановой структурой. Формула риманова объёма двумерной поверхности в \mathbb{R}^3 с векторным произведением.
- 51) Скалярное произведение на произвольных тензорах и определение оператора $*$ для дифференциальных форм.
- 52) Выражение оператора $*$ в евклидовом пространстве для ортонормированных и сферических координат. Выражение дивергенции, градиента и ротора в \mathbb{R}^3 через оператор $*$, выражение лапласиана в сферических координатах.
- 53) Ковариантное дифференцирование, его аксиоматические свойства. Формула Козюля и существование ковариантного дифференцирования.
- 54) Длина кривой на римановом многообразии и действие кривой. Определение метрики на римановом многообразии.
- 55) Геодезические и их уравнение. Перенос вектора вдоль кривой с помощью ковариантного дифференцирования.
- 56) $*$ Тензор кривизны Римана, его свойства симметрии и геометрический смысл. Тензор Риччи и скалярная кривизна.
- 57) Пространство-время специальной теории относительности, его геодезические и изометрии.
- 58) Движение в электромагнитном поле, дифференциальная форма электромагнитного поля, инвариантный вид уравнений Максвелла.
- 59) Риманова структура на сфере, её геодезические, изометрии и кривизна.
- 60) Риманова структура в гиперболическом пространстве, его геодезические, изометрии и кривизна.
- 61) Полуриманова структура в пространстве де Ситтера и анти-пространстве де Ситтера, описание световых лучей в этих пространствах.
- 62) Метрика Шварцшильда и описание радиальных световых лучей в ней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Н. Карасёв. *Отдельные темы математического анализа*. rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf, 2018.
- [2] Ш. Стернберг. *Лекции по дифференциальной геометрии*. Мир, 1970.
- [3] Ф. Уорнер. *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*. Мир, 1987.
- [4] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. *Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии*. Физматлит, 2004.
- [5] S. Sternberg. *Curvature in Mathematics and Physics*. Dover Publications, 2012.