

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА  
по курсу «Аналитическая геометрия»  
1 курс, осенний семестр, 2019/2020 уч.г.  
(ФОПФ)

(Поток Кожевникова П.А.)  
**I. Введение.**

Матрицы и детерминанты малых размеров. Системы линейных уравнений. Множества. Логика. Индукция.

**II. Векторы и декартовы системы координат (ДСК) на плоскости и в пространстве.**

1. Линейные операции с векторами и их свойства. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Связь между линейной зависимостью, коллинеарностью и компланарностью векторов. Базис, координаты вектора в базисе. Изменение координат при замене базиса.
2. Скалярное произведение, его свойства. Проекция вектора на направление. Выражение скалярного произведения в ортонормированном и произвольном базисе. Вычисление длины вектора и угла между векторами.
3. Левые и правые тройки векторов. Ориентированный объём параллелепипеда (смешанное произведение). Свойства смешанного произведения. Выражение смешанного произведения в произвольном базисе. Критерий компланарности.
4. Векторное произведение, его свойства, выражение в правом ортонормированном базисе. Вычисление площадей, перпендикуляр к паре векторов. Двойное векторное произведение.
5. Общая декартова система координат, прямоугольная система координат. Замена декартовой системы координат, формулы перехода. Полярная, цилиндрическая, сферическая системы координат.

**III. Многочлены-1.**

1.  $\mathbb{R}[X]$ . Степень многочлена. Сложение, умножение, деление с остатком.
2. Корни многочлена. Теорема Безу. Кратность корня, число корней с учетом кратности не превосходит степени. Формальное и функциональное равенство многочленов. Теорема Виета.
3. Многочлены от нескольких переменных. Степень, ее инвариантность относительно линейной замены. Лемма о старшем члене.
4. Понятие уравнения множества. Алгебраические множества (линии и поверхности); пересечение и объединение алгебраических множеств.

Порядок, сохранение порядка при переходе к другой системе координат. Пересечение алгебраического множества с прямой и с плоскостью.

#### **IV. Системы координат. Прямые и плоскости. Эллипс, гипербола, парабола. Поверхности.**

1. Прямая на плоскости, различные способы задания, их эквивалентность. Линейное неравенство. Пучок прямых. Формула расстояния от точки до прямой.
2. Плоскость в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Взаимное расположение двух и трех плоскостей. Линейное неравенство. Пучок плоскостей. Формула расстояния от точки до плоскости.
3. Прямая в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Взаимное расположение двух прямых. Формулы для расстояния от точки до прямой (в пространстве) и между скрещивающимися прямыми.
4. Эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения. Теоремы о фокусах и директрисах. Касательные. Оптическое свойство.
5. Цилиндрические, конические поверхности, поверхности вращения. Эллипсоиды, гиперboloиды, параболоиды. Прямолинейные образующие.

#### **V. Матрицы. Элементарные преобразования.**

1. Сложение матриц, умножение матрицы на число. Транспонирование. След матрицы.
2. Линейные комбинации, линейная оболочка систем векторов-столбцов (или матриц). Линейная зависимость. Ранг. Базисная подсистема. Основная теорема о рангах. Стандартный и треугольный базис в  $\mathbb{R}^n$ . Строчный и столбцовый ранг матрицы. Оценка ранга суммы матриц.
3. Умножение матриц, его свойства. Суммирование, его тензорная запись. Отсутствие коммутативности умножения. Единичная матрица. Обратимые матрицы. Ранг произведения.
4. Элементарные преобразования строк и столбцов. Элементарные матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому и упрощенному (улучшенному ступенчатому) виду методом Гаусса.
5. Элементарные преобразования строк не меняют линейных соотношений между столбцами. Инвариантность строчного и столбцового

ранга при элементарных преобразованиях. Теорема о ранге матрицы.

6. Невырожденные матрицы. Критерий обратимости-1 (невырожденность = обратимость). Алгоритм нахождения обратной матрицы элементарными преобразованиями. Базисный минор (невырожденность подматриц на пересечение системы  $r = \text{rg } A$  линейно независимых строк и столбцов).

## **VI. Системы линейных уравнений (СЛУ).**

1. СЛУ. Разные виды заданий: матричное уравнение, линейная комбинация столбцов, матрица коэффициентов и расширенная матрица. Критерий совместности Кронекера-Капелли.
2. Однородные СЛУ, фундаментальная система решений (ФСР) и общее решение однородной СЛУ. Структура общего решения СЛУ. Алгоритм решения СЛУ методом Гаусса. Мощность ФСР  $= n - \text{rg } A$ .
3. Восстановление СЛУ по множеству решений. Любая линейная оболочка — множество решений некоторой однородной СЛУ.

## **VII. Абстрактные отображения.**

Понятие отображения и преобразования. Терминология. Примеры. Отношение эквивалентности. Бинарные операции на множестве.

## **VIII. Группы.**

1. Понятия полугруппы и группы. Абелевы группы. Аддитивная и мультипликативная форма записи. Порядок группы. Определения изоморфизма, гомоморфизма. Прямое произведение (прямая сумма). Обратимые элементы полугруппы. Подгруппы. Порождающие множества.
2. Примеры: числа по сложению и умножению; матрицы по сложению и умножению. Группы преобразований. Понятие действия группы на множестве. Понятие о представлении группы.
3. Порядок элемента. Циклические группы, их классификация. Количество порождающих элементов в  $(\mathbb{Z}_n, +)$  равно  $\varphi(n)$ . Подгруппы циклической группы.
4. Симметрическая группа  $S_n$ . Независимые циклы. Число инверсий, четность перестановки. Знакопеременная подгруппа  $A_n$ .
5. Левые смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа, ее следствия: порядок элемента — делитель порядка группы; описание групп простого порядка; теоремы Ферма и Эйлера (в теории чисел).

### IX. Кольца и поля.

1. Теория делимости в  $\mathbb{Z}$ . Простые числа. НОД. Алгоритм Евклида, линейное представление НОД. Разложение на простые множители и его единственность. Китайская теорема об остатках.
2. Арифметика по модулю  $n$ . Кольцо  $\mathbb{Z}_n$ .  $\mathbb{Z}_{km} \cong \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_m$  при  $(k, m) = 1$ .  $\mathbb{Z}_n$  — поле тогда и только тогда, когда  $n$  — простое. Характеристика поля.
3. Поле комплексных чисел, сопряжение. Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая запись. Умножение, возведение в степень, обращение. Извлечение корней. Группа корней  $n$ -й степени из 1. Матрицы с комплексными коэффициентами.
4. Кольцо  $\mathbb{F}[X]$  многочленов над произвольным полем. Неприводимые многочлены, НОД. Разложение на неприводимые сомножители и его единственность. Неприводимые многочлены над  $\mathbb{C}$  и над  $\mathbb{R}$ .

### X. Определитель.

1. Детерминант (определитель) матрицы как полилинейная и кососимметричная функция столбцов. Явная формула (через элементы матрицы).
2. Изменение определителя при элементарных преобразованиях столбцов. Определитель треугольной матрицы. Критерий обратимости-2 ( $\det \neq 0$ ). Определитель транспонированной матрицы.
3. Определитель произведения матриц. Определитель матрицы с углом нулей. Разложение определителя по строке, столбцу.
4. Правило Крамера для решения СЛУ (с невырожденной матрицей коэффициентов), формула обратной матрицы.