

**Экзаменационная программа по
Введению в математический анализ**
осенний семестр 2018–2019 учебного года
(для всех факультетов кроме ФИВТ)

1. Действительные числа. Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу). Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.

2. Предел числовой последовательности и его свойства. Теорема Кантора о вложенных отрезках. *Бесконечно малые последовательности и их свойства*¹. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Число ε . Бесконечно большие последовательности и их свойства.

3. Подпоследовательности, частичные пределы. Верхний и нижний пределы числовой последовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости последовательности.

4. Определения предела числовой функции одной переменной по Гейне и по Коши, их эквивалентность. Свойства пределов функции. Критерий Коши существования конечного предела функции. Теорема о замене переменной под знаком предела. Теорема об односторонних пределах монотонной функции.

5. Определение непрерывности функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке. *Односторонняя непрерывность. Переход к пределу под знаком непрерывной функции*.² Непрерывность сложной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.

6. Свойства функций, непрерывных на отрезке — ограниченность, достижение точных верхней и нижней граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема об обратной функции.

7. Непрерывность элементарных функций. Определение и свойства экспоненты. *Замечательные пределы*³.

8. Производная функции в точке. Односторонние производные. Дифференцируемость функции в точке. Связь понятий непрерывности и дифференцируемости. Дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Инвариантность формы дифференциала

¹Кроме потока Е.Ю. Редкозубовой.

²Кроме потока Е.Ю. Редкозубовой.

³Для потока Я.М. Дымарского: второй замечательный предел без доказательства.

относительно замены переменной.

*Дифференцирование функций, заданных параметрически*⁴.

9. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n -й производной произведения функций. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменной.

10. Теорема Ферма (необходимое условие существования локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа. Основные разложения по формуле Маклорена. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ ⁵.

*Теорема о промежуточных значениях производной (теорема Дарбу)*⁶.

11. Применение производной к исследованию функций. Необходимые условия и достаточные условия монотонности функции. Достаточные условия существования локального экстремума в терминах первой производной. Достаточные условия существования локального экстремума в терминах второй и высших производных. Выпуклость и точки перегиба. Необходимые условия, достаточные условия выпуклости.

12. Теорема о структуре множества первообразных. Теорема о замене переменных и интегрировании по частям для неопределенного интеграла. Интегрирование рациональных функций. Основные приемы интегрирования иррациональных функций.

13. Теорема Лагранжа для вектор-функций. *Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для вектор-функции*⁷. Кривые на плоскости и в пространстве. Гладкая кривая, касательная к гладкой кривой. Допустимая замена параметра. Длина кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой. Формулы Френе.

14⁸. *Открытые и замкнутые множества в \mathbb{R}^n . Теорема Больцано–Вейерштрасса в \mathbb{R}^n . Критерий компактности множества.*

Замкнутость замыкания и открытость внутренности множества. Замкнутость дополнения к открытому множеству.

Теорема Гейне–Бореля.

⁴Кроме потока Е.Ю. Редкозубовой

⁵Для потока Я.М. Дымарского неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ без доказательства.

⁶Для потока Я.М. Дымарского.

⁷Кроме потока Л.Н. Знаменской.

⁸Для потока Г.Е. Иванова