Экзаменационная программа
Введение в математический анализ
осенний семестр 2018–2019 учебного года, ФИВТ

1. Множество действительных чисел. Теорема о существовании и единственности (точной) верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу). Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.

2. Предел числовой последовательности: единственность, ограниченность. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности. Число e. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Бесконечные пределы. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Частичные пределы, верхний и нижний пределы. Фундаментальные последовательности и критерий Коши.

3. Топология числовой прямой. Открытые и замкнутые множества. Предельные точки множества и критерий замкнутости.

4. Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне, их эквивалентность. Свойства пределов функции. Предел композиции. Критерий Коши существования предела функции. Теорема об односторонних пределах монотонной функции.

5. Непрерывность функции в точке. Равносильные определения непрерывности. Непрерывность композиции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.

6. Теорема Вейерштрасса об ограниченности и достижимости точных граней непрерывной на отрезке функции. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Непрерывность монотонной функции, отображающей промежуток на промежуток. Теорема об обратной функции. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

7. Экспонента и ее свойства. Непрерывность основных элементарных функций. Замечательные пределы. O-символика.

8. Дифференцируемость функции в точке, производная и дифференциал. Непрерывность дифференцируемой функции. Односторонние производные. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Теорема о производной композиции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменного. Теорема о производной обратной функции. Производные основных элементарных функций.

9. Локальные экстремумы. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля. Теоремы Лагранжа и Коши о среднем значении. Условия монотонности дифференцируемой функции. Достаточное условие экстремума функции в терминах первой производной. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.

10. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n-й производной произведения функций. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Разложения в нуле функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^\alpha$. Достаточное условие локального экстремума в терминах высших производных. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Выпуклые функции. Дифференциальные условия выпуклости.

11. Теорема о структуре множества первообразных. Неопределенный интеграл и его свойства. Интегрирование рациональных функций.

12. Определенный интеграл Римана. Линейность и монотонность интеграла. Верхние и нижние суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости Дарбу. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных функций и ограниченных функций с конечным числом точек разрыва. Интегрируемость произведения и модуля интегрируемых функций. Теорема о среднем. Интегрируемость по подотрезкам. Аддитивность интеграла. Интеграл с переменным верхним пределом: непрерывность и дифференцируемость. Формула Ньютона–Лейбница. Замена переменой в интеграле. Интегрирование по частям. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.