

Экзаменационная программа
по курсу «Теория функций комплексного переменного»
3 курс, 5 семестр 2021/22 уч. год
(ФУПМ, ФПФЭ)

(Поток Половинкина Е.С.)

1. Понятия производной и дифференцируемости функций по комплексному переменному. Критерий дифференцируемости в точке. Понятие регулярной функции.
2. Понятие интеграла по кривой от функции комплексного переменного. Основные свойства интегралов.
3. Первообразная функции и полный дифференциал. Теорема об интеграле, независимом от формы кривой.
4. Лемма Гурса. Интегральная теорема Коши в односвязной области.
5. Интегральная формула Коши.
6. Интеграл Коши. Теорема о дифференцировании интеграла Коши. Бесконечная дифференцируемость регулярных функций.
7. Степенной ряд и круг его сходимости. Ряд Тейлора. Разложение функции, регулярной в круге, в степенной ряд.
8. Теоремы Вейерштрасса для локально равномерно сходящихся рядов из регулярных функций. Регулярность суммы степенного ряда.
9. Понятие ряда Лорана и его кольцо сходимости. Разложение функции, регулярной в кольце, в ряд Лорана.
10. Теорема о единственности регулярной функции.
11. Теорема Морера. Теорема о стирании разреза.
12. Классификация изолированных особых точек однозначного характера по структуре главной части лорановского разложения.
13. Понятие вычета. Теорема Коши о вычетах. Вычисление вычетов.
14. Вычисление несобственных интегралов вида $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx, \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iax} dx$, где $R(x)$ - рациональная функция с помощью вычетов. Лемма Жордана.
15. Приращение аргумента z вдоль гладкой кривой, теорема о его интегральном представлении. Логарифмическое свойство и свойство устойчивости при непрерывной деформации.
16. Существование регулярных ветвей многозначной функции $\text{Ln } z$ в односвязной области. Их общий вид.
17. Общий вид и критерий существования регулярных ветвей многозначной функции $\text{Ln} f(z)$ в области.
18. Общий вид и критерий существования регулярных ветвей многозначной функции $\left\{ \sqrt[n]{f(z)} \right\}$ в области.
19. Понятие целой функции. Вид целой функции, модуль которой ограничен на бесконечности степенью модуля аргумента. Теорема Лиувилля.
20. Теорема Сохоцкого для целой функции.
21. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.

22. Понятие мероморфной функции. Теорема о разложении мероморфной функции в ряд простейших дробей.
23. Лемма об открытости. Принцип сохранения области. Однолиственность и локальная однолиственность.
24. Понятие конформного отображения в области на комплексной плоскости. Критерий конформности в точке.
25. Понятие конформного отображения в расширенной комплексной плоскости. Примеры построения конформного отображения полуплоскости на единичный круг и единичного круга на себя.
26. Дробно-линейная функция и ее свойства: 1) конформность; 2) образы окружности и прямой; 3) образы симметричных точек; 4) отображение трех различных точек в три различные точки.
27. Конформные отображения, осуществляемые степенной и экспоненциальной функциями.
28. Функция Жуковского и ее свойства: 1) конформность; 2) образы лучей и окружностей.
29. Гармонические функции двух переменных. Их связь с регулярными функциями. Принцип максимума и минимума гармонической функции.
30. Принцип максимума модуля регулярной функции. Лемма Шварца.
31. Теорема от общего виде конформного отображения единичного круга на себя.
32. Теорема Римана о конформной эквивалентности односвязных областей (доказательство единственности).
33. . Инвариантность гармонической функции при конформном отображении. Понятие общей задачи Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости. Лемма и теорема о единственности решения такой задачи в ограниченной области.
34. Вывод интеграла Пуассона для круга и свойства его ядра. Теорема о существовании решения общей задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.
35. Понятия аналитического продолжения вдоль цепочки кругов и вдоль кривой. Их эквивалентность. Понятие полной аналитической функции и ее римановой поверхности. Полная аналитическая функция $Lnf(z)$.
36. Особые точки аналитических функций. Точки ветвления. Теорема Коши-Адамара.