

**ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА**  
**по курсу «Теория функций комплексного переменного»**  
3 курс, 5 семестр, 2021/2022 уч.г., (ФАЛТ)  
(Поток Бурмистрова А.Н.)

1. Комплексные числа. Сфера Римана. Стереографическая проекция и ее свойства. Расширенная комплексная плоскость. Последовательности и ряды. Лемма Гейне–Бореля о покрытии (без доказательства). Суммирование повторных рядов. Непрерывные функции.
2. Дифференцирование по комплексному переменному. Условия Коши–Римана. Критерий дифференцируемости. Сопряженные гармонические функции двух переменных и связь между ними в односвязной области. Дифференцируемость регулярной функции.
3. Элементарные функции комплексного переменного: степенная, показательная, тригонометрические, гиперболические. Теоремы сложения для показательной и тригонометрических функций. Теорема об обратной функции (невырожденный случай). Понятие о многозначной функции и ее регулярных ветвях. Регулярные ветви функций  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\{\operatorname{Ln} z\}$ . Производная функции  $z^{\frac{1}{n}}$ .
4. Интегрирование по комплексному переменному. Интегральная теорема Коши (доказательство Гурса) для дифференцируемых функций. Интегральная формула Коши. Регулярность интеграла типа Коши.
5. Первообразная. Достаточное условие существования первообразной. Формула Ньютона-Лейбница. Теорема Морера.
6. Степенные ряды, первая теорема Абеля, круг сходимости. Формула Коши-Адамара. Разложение в степенной ряд функции, дифференцируемой в области. Почленное интегрирование функциональных рядов. Первая (без доказательства) и вторая теоремы Вейерштрасса для равномерно сходящихся рядов регулярных функций.
7. Ряд Лорана и его кольцо сходимости. Разложение в ряд Лорана функции, дифференцируемой в кольце. Единственность разложения, и оценка Коши для коэффициентов. Теоремы единственности (внутренняя и граничная).
8. Изолированные особые точки однозначного характера и их классификация. Определение характера особой точки по главной части ряда Лорана.
9. Вычет. Вычисление вычета в полюсе. Вычет в бесконечно удаленной точке. Лемма Жордана.
10. Вычисление интегралов:  $\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi, \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx, \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \begin{pmatrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{pmatrix} dx.$
11. Вычисление интегралов:  $\int_0^{\infty} x^{\alpha} R(x) dx, \int_a^b \left( \frac{x-a}{b-x} \right)^{\alpha} R(x) dx.$  Функции от матриц.
12. Вычисление интегралов:  $\int_0^{\infty} R(x) \ln x dx, \int_0^{\infty} x^{\alpha} R(x) \ln x dx.$
13. Целые функции, теорема Лиувилля. Теоремы Сохоцкого и Пикара (последняя без доказательства).
14. Мероморфные функции. Теорема о разложении мероморфной функции в сумму дробей. Формула для  $\operatorname{ctg} z.$  Суммирование некоторых рядов.

15. Понятие об аналитическом продолжении элементов по цепочке областей и по кривой. Их эквивалентность. Полная аналитическая функция, ветвь аналитической функции, функция аналитическая в области. Теорема о монодромии (без доказательства). Примеры аналитических функций  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\{\operatorname{Ln} z\}$ . Производная функции  $z^\alpha$
16. Особые точки аналитической функции, эквивалентность особых точек. Точки ветвления. Теорема Коши-Адамара о наличии особой точки на границе круга сходимости степенного ряда. Оценка радиуса сходимости ряда Тейлора.
17. Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема о количестве нулей и полюсов. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.
18. Принцип сохранения области. Лемма об открытости. Теорема о среднем. Принцип максимума и минимума модуля регулярной функции. Принцип максимума и минимума гармонической функции.
19. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформность в точке и в области. Критерий конформности в области.
20. Симметрия относительно окружности (инверсия). Дробно-линейная функция и ее свойства: сохранение класса окружностей, сохранение ангармонического отношения, сохранение симметрии относительно окружности.
21. Конформные отображения с помощью элементарных функций. Функция Жуковского и ее свойства. Теорема Римана о конформной эквивалентности односвязных областей (без доказательства). Условия нормировки. Принцип соответствия границ.
22. Теорема о стирании пунктира. Симметрия относительно действительной оси. Принцип симметрии Римана-Шварца.
23. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Единственность решения. Функция Грина. Интегралы Пуассона для круга и полуплоскости. Критерий гармоничности в области.