

Экзаменационная программа
по курсу «Теория функций комплексной переменной»
3 курс, 5 семестр, 2020/21 учебный год
ФАЛТ (поток Бурмистрова А.Н.)

1. Комплексные числа. Сфера Римана. Стереографическая проекция и ее свойства. Расширенная комплексная плоскость. Последовательности и ряды. Лемма Гейне-Бореля о покрытии (без доказательства). Суммирование повторных рядов. Предел и непрерывность функции комплексной переменной.
2. Дифференцирование по комплексной переменной. Критерий дифференцируемости. Условия Коши-Римана. Сопряженные гармонические функции двух переменных и связь между ними в односвязной области. Степенные ряды, первая теорема Абеля, круг сходимости, формула Коши-Адамара. Дифференцируемость регулярной функции.
3. Элементарные функции комплексной переменной: степенная, показательная, тригонометрические, гиперболические. Теоремы сложения для этих функций. Теорема об обратной функции. Понятие о регулярных ветвях многозначной функции. Регулярные ветви функций $\{ \sqrt[n]{z} \}$ и $\{ \operatorname{Ln} z \}$ и их производные.
4. Интегрирование по комплексной переменной. Интегральная теорема Коши. Доказательство Гурса для дифференцируемых функций. Интегральная формула Коши. Производная n -го порядка интеграла типа Коши.
5. Первообразная. Достаточное условие существования первообразной. Формула Ньютона-Лейбница. Теорема Морера. Теорема о стирании пунктира.
6. Разложение в степенной ряд функции, дифференцируемой в области. Теоремы единственности (внутренняя и граничная).
7. Интегрирование функциональных рядов. Первая (без доказательства) и вторая теоремы Вейерштрасса для рядов регулярных функций.
8. Ряд Лорана и его кольцо сходимости. Разложение в ряд Лорана функции, дифференцируемой в кольце. Единственность разложения, и оценка Коши для коэффициентов. Изолированные особые точки однозначного характера и их классификация. Определение характера особой точки по виду ряда Лорана. Теоремы Сохоцкого и Пикара (без доказательства).
9. Вычет. Вычисление вычета в полюсе. Вычет в бесконечно удаленной точке. Лемма Жордана.
10. Вычисление интегралов: $\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$, $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \begin{pmatrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{pmatrix} dx$.
11. Вычисление интегралов: $\int_0^{\infty} x^{\alpha} R(x) dx$, $\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^{\alpha} R(x) dx$.
12. Вычисление интегралов: $\int_0^{\infty} R(x) \ln x dx$, $\int_0^{\infty} x^{\alpha} R(x) \ln x dx$.
13. Целые функции, теорема Лиувилля. Функции от матриц.
14. Мероморфные функции. Правильная система контуров. Теорема о разложении мероморфной функции. Формула для $\operatorname{ctg} z$. Суммирование числовых рядов $\sum_{-\infty}^{+\infty} R(n)$ и $\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n R(n)$.
15. Аналитическое продолжение элемента по цепочке областей и по кривой. Полная аналитическая функция, ветвь аналитической функции, функция аналитическая в области. Теорема о монодромии (без доказательства).
16. Особые точки аналитической функции, эквивалентность особых точек. Точки ветвления. Теорема Коши-Адамара о наличии особой точки на границе круга сходимости степенного ряда. Оценка радиуса сходимости ряда Тейлора.
17. Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема о количестве нулей и полюсов. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.
18. Лемма об открытости. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля регулярной функции. Принцип максимума и минимума гармонической функции.
19. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформность в точке и в области. Критерий конформности в области. Принцип соответствия границ.
20. Симметрия относительно окружности (инверсия). Дробно-линейная функция и ее свойства: сохранение класса окружностей и прямых, ангармонического отношения и симметрии относительно окружности.
21. Конформные отображения с помощью элементарных функций. Функция Жуковского и ее свойства. Теорема Римана о конформной эквивалентности односвязных областей (без доказательства). Условия нормировки.
22. Симметрия относительно действительной оси. Принцип симметрии Римана-Шварца.
23. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Единственность решения. Функция Грина. Решение задачи Дирихле для круга и полуплоскости. Критерий гармоничности функции в области.