

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу «Теория функций комплексного переменного»

3 курс, 5 семестр, 2020/2021 уч.г.

(ФУПМ, ФПФЭ)

(Поток Половинкина Е.С.)

1. Понятия производной и дифференцируемости функций по комплексному переменному. Критерий дифференцируемости в точке. Понятие функции, регулярной в области.
2. Теорема об обратной функции. Главная регулярная ветвь логарифма.
3. Понятие интеграла по кривой от функции комплексного переменного. Основные свойства интегралов. Первообразная функции и полный дифференциал, их связь с интегралом, независимым от формы кривой.
4. Интегральная теорема Коши для регулярной функции. Лемма Гурса.
5. Интегральная формула Коши.
6. Интеграл Коши. Теорема о дифференцировании интеграла Коши. Бесконечная дифференцируемость регулярных функций.
7. Степенной ряд и круг его сходимости. Ряд Тейлора. Разложение регулярной функции в степенной ряд.
8. Теоремы Вейерштрасса. Регулярность суммы степенного ряда.
9. Понятие ряда Лорана и его кольцо сходимости. Разложение в ряд Лорана функции, регулярной в кольце.
10. Теорема единственности регулярной функции.
11. Общая задача Дирихле для уравнения Лапласа. Инвариантность гармонической функции при конформном отображении. Единственность решения общей задачи Дирихле для уравнения Лапласа в ограниченной области.
12. Теорема Морера. Теорема о стирании разреза.
13. Классификация изолированных особых точек однозначного характера по структуре главной части лорановского разложения.
14. Понятие вычета. Теорема Коши о вычетах. Вычисление вычетов.
15. Вычисление несобственных интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} dx,$$

где $R(x)$ — рациональная функция, с помощью вычетов. Лемма Жордана.

16. Приращение аргумента z вдоль гладкого контура, его интегральное представление и свойства.
17. Существование регулярных ветвей многозначной функции $\operatorname{Ln} z$ в односвязной области, их общий вид.
18. Критерий выделения регулярной ветви многозначной функции $\operatorname{Ln} f(z)$.
19. Понятие целой функции. Вид целой функции, модуль которой ограничен на бесконечности, степенью модуля аргумента. Теорема Лиувилля.
20. Теорема Сохоцкого. Теорема Пикара (без доказательства).
21. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.
22. Мероморфные функции. Теорема о разложении мероморфной функции в ряд простейших дробей.
23. Теорема Коши–Адамара.
24. Лемма об открытости. Принцип сохранения области. Однолистность и многолистность в малом.
25. Понятие конформного отображения в области на комплексной плоскости. Критерий конформности в точке.
26. Понятие конформного отображения в расширенной комплексной плоскости. Примеры построения конформного отображения полуплоскости на единичный круг и единичного круга на себя.
27. Дробно-линейная функция и её свойства: 1) конформность; 2) образы окружностей и прямой; 3) симметричные точки.
28. Функция Жуковского и её свойства: 1) конформность; 2) образы лучей и окружностей.
29. Конформные отображения, осуществляемые степенной и экспоненциальной функциями.
30. Гармонические функции двух переменных. Их связь с регулярными функциями. Принцип максимума и минимума гармонической функции.
31. Принцип максимума модуля регулярной функции. Лемма Шварца.
32. Общий вид конформного отображения единичного круга на себя.
33. Теорема Римана о существовании конформного отображения (без доказательства). Теорема о единственности конформного отображения в условиях теоремы Римана.
34. Интеграл Пуассона для круга. Теорема о существовании решения общей задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.