

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу «Теория функций комплексного переменного»

3 курс, 5 семестр, 2020/2021 уч.г.

(Поток Городецкого С.Е.)

1. Комплексные числа. Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана. Стереографическая проекция.
2. Понятия производной и дифференцируемости функций по комплексному переменному. Критерий дифференцируемости в точке. Понятие функции, регулярной в области.
3. Понятие интеграла по кривой от функции комплексного переменного. Основные свойства интеграла. Первообразная и полный дифференциал в области. Лемма Гурса и теорема Коши для выпуклой области.
4. Индекс точки относительно кривой и его свойства.
5. Интегральная формула Коши.
6. Интеграл Коши. Теорема о дифференцировании интеграла Коши. Бесконечная дифференцируемость регулярных функций.
7. Степенной ряд и круг его сходимости. Ряд Тейлора. Разложение регулярной функции в степенной ряд.
8. Теоремы Вейерштрасса. Регулярность суммы степенного ряда.
9. Понятие ряда Лорана и его кольцо сходимости. Разложение в ряд Лорана функции, регулярной в кольце.
10. Теорема единственности регулярной функции.
11. Понятие первообразной. Достаточное условие существования первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона–Лейбница.
12. Теорема Морера. Теорема о стирании разреза.
13. Классификация изолированных особых точек однозначного характера по структуре главной части лорановского разложения.
14. Понятие вычета. Теорема Коши о вычетах. Вычисление вычетов.
15. Вычисление несобственных интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} dx,$$

где $R(x)$ — рациональная функция, с помощью вычетов. Лемма Жордана.

16. Теорема об обратной функции.
17. Понятие многозначной функции и её ветвей. Определение функции $\text{Ln}(z)$. Главная регулярная ветвь логарифма.

18. Приращение аргумента z и аргумента $f(z)$ вдоль гладкого контура, его интегральное представление и свойства.
19. Критерий выделения регулярных ветвей многозначной функции $\operatorname{Ln} f(z)$.
20. Критерий выделения регулярных ветвей многозначной функции $\left\{ \sqrt[n]{f(z)} \right\}$.
21. Понятие целой функции. Вид целой функции, модуль которой ограничен на бесконечности степенью модуля аргумента. Теорема Лиувилля. Основная теорема алгебры.
22. Теорема Сохоцкого. Большая теорема Пикара (без доказательства).
23. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.
24. Мероморфные функции. Теорема о разложении мероморфной функции в ряд простейших дробей.
25. Принцип сохранения области. Однолиственность и многолиственность в малом.
26. Понятие конформного отображения в области на комплексной плоскости. Критерий конформности в точке.
27. Понятие конформного отображения в расширенной комплексной плоскости. Примеры построения конформного отображения полуплоскости на единичный круг и единичного круга на себя.
28. Дробно-линейная функция и её свойства: 1) конформность; 2) инвариантность двойного отношения четырёх точек. 3) образы окружностей и прямых; 4) симметричные точки; 5) отображение трёх различных точек в три различные точки.
29. Функция Жуковского и её свойства: 1) конформность; 2) образы лучей и окружностей.
30. Конформные отображения, осуществляемые степенной и экспоненциальной функциями.
31. Гармонические функции двух переменных. Их связь с регулярными функциями. Принцип максимума гармонической функции.
32. Принцип максимума модуля регулярной функции. Лемма Шварца.
33. Общий вид конформного отображения единичного круга на себя.
34. Теорема Римана о существовании конформного отображения (без доказательства). Теорема о единственности конформного отображения в условиях теоремы Римана.
35. Принцип симметрии.