

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА  
по курсу «Кратные интегралы и теория поля»  
2 курс, 3 семестр, ЛФИ  
поток Г.Е. Иванова, 2021-2022 уч.г.

1. Теорема о выражении меры множества через интеграл от меры сечений. Теорема Фубини.
2. Теорема о замене переменных в кратном интеграле.
3. Теорема о построении криволинейной системы координат исходя из ее части.
4. Необходимые условия безусловного экстремума. Достаточные условия безусловного экстремума.
5. Геометрический касательный вектор к подмножеству пространства  $\mathbb{R}^n$ . Теорема о структуре множества  $\tilde{T}_P(M)$  геометрических касательных векторов к подмножеству пространства  $\mathbb{R}^n$ , заданному системой уравнений.
6. Метод Лагранжа нахождения точек условного экстремума. Необходимые условия условного экстремума. Достаточные условия условного экстремума.
7. Гладкие подмногообразия пространства  $\mathbb{R}^N$ . Теорема о гладком подмногообразии пространства  $\mathbb{R}^N$ , заданном системой уравнений.
8. Карты на гладком подмногообразии пространства  $\mathbb{R}^N$ . Теорема о параметрическом способе задания гладкого подмногообразия пространства  $\mathbb{R}^N$ .
9. Атлас на гладком подмногообразии пространства  $\mathbb{R}^N$ . Теорема о гладкой замене координат при переходе между картами гладкого подмногообразия пространства  $\mathbb{R}^N$ .
10. Теорема о структуре множества  $\tilde{T}_P(M)$  геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию  $M$  пространства  $\mathbb{R}^N$ . Изоморфизм пространства  $\tilde{T}_P(M)$  геометрических касательных векторов и пространства  $T_P(M)$  касательных векторов для гладкого подмногообразия  $M$  пространства  $\mathbb{R}^N$ .
11. Общие (абстрактные) определения многообразия и гладкого многообразия. Проверка того, что гладкое подмногообразие пространства  $\mathbb{R}^N$  является гладким многообразием.
12. Касательный вектор к абстрактному гладкому многообразию. Изменение координат касательного вектора и ковектора при замене локальной системы координат.
13. Край многообразия. Теорема о независимости краевой точки карты от карты.
14. Ориентация гладкого многообразия. Существование ровно двух ориентаций линейно-связного ориентируемого многообразия.
15. Теорема о построении ориентирующего атласа для края многообразия на основе ориентирующего атласа исходного многообразия. Согласование ориентации гладкого многообразия и ориентации его края.
16. Тензорное поле на многообразии. Изменение компонент тензорного поля при замене локальной системы координат. Выражение тензорного поля через его компоненты с помощью операции тензорного произведения.

17. Дифференциальные формы на гладком многообразии, их представление через внешнее произведение дифференциалов координатных функций. Внешний дифференциал дифференциальной формы, его независимость от локальной системы координат.
18. Правило Лейбница для внешнего дифференциала внешнего произведения двух дифференциальных форм.
19. Перенос касательных векторов. Выражение для переноса базисного вектора касательного пространства через частные производные координатных функций отображения.
20. Перенос дифференциальных форм при отображении многообразий. Выражение для переноса базисного вектора кокасательного пространства через частные производные координатных функций отображения.
21. Обратный перенос дифференциальных форм при суперпозиции отображений многообразий. Коммутативность операций внешнего дифференцирования и обратного переноса дифференциальной формы.
22. Теорема о разбиении единицы на многообразии.
23. Определение интеграла от дифференциальной формы и его корректность. Криволинейный и поверхностный интегралы.
24. Теорема Стокса.
25. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Связь условий точности и замкнутости дифференциальных форм. Условия существования скалярного и векторного потенциалов векторного поля в  $\mathbb{R}^3$  в терминах точности соответствующих дифференциальных форм.
26. Теорема о цепной гомотопии. Лемма Пуанкаре.
27. Риманова метрика. Выражение кривизны нормального сечения через первую и вторую квадратичные формы поверхности.
28. Определение формы риманова объема и ее связь с дифференциальной формой (тензором Леви–Чивиты). Определение интеграла первого рода скалярной функции по гладкому многообразию. Поток векторного поля через двумерное ориентируемое подмногообразие пространства  $\mathbb{R}^3$ , выражение потока через интеграл от дифференциальной формы и интеграл первого рода.
29. Геометрический смысл дивергенции и ротора векторного поля.
30. Определение производной Ли тензорного поля через его обратный перенос фазовым потоком. Выражение компонент производной Ли тензорного поля по векторному полю через компоненты этих полей. Выражение производной Ли для тензорных полей типов  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$ .
31. Коммутативность производной Ли и внешнего дифференциала формы.
32. Правило Лейбница для внутреннего произведения векторного поля на внешнее произведение двух дифференциальных форм.
33. Магическое тождество Картана.