

Экзаменационная программа
по курсу «Введению в математический анализ»
осенний семестр 2021–2022 учебного года
(кроме потока Карасёва Р.Н. (ЛФИ))

1. Действительные числа. Теорема о существовании и единственности (точной) верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу). Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел. *Три эквивалентные формулировки аксиомы непрерывности*¹.
2. Теорема Кантора о вложенных отрезках.
3. Предел числовой последовательности. Единственность предела. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности. Число e . Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства.
4. Подпоследовательности, частичные пределы. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Критерий Коши существования конечного предела последовательности. *Теорема о верхнем и нижнем пределах*². *Теорема об эквивалентных определениях верхнего и нижнего пределов*³.
5. Определения предела числовой функции одного переменного в терминах окрестностей и в терминах последовательностей, их эквивалентность. Свойства пределов функции. Критерий Коши существования конечного предела функции. *Предел сложной функции*⁴. *Теорема о замене переменного под знаком предела*⁵. Существование односторонних пределов у монотонных функций.
6. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке. Односторонняя непрерывность. Непрерывность сложной функции. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.
7. Свойства функций, непрерывных на отрезке — ограниченность, достижимость (точных) верхней и нижней граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Равномерная непрерывность функции, непрерывной на отрезке. Теорема об обратной функции.

¹ Для потока А.И. Тюленева.

² Для потоков О.В. Бесова и А.И. Тюленева.

³ Для потоков А.Л. Лукашова и А.И. Тюленева.

⁴ Для потока О.В. Бесова.

⁵ Кроме потока О.В. Бесова.

8. Непрерывность элементарных функций. Определение и свойства показательной функции, *логарифмической и степенной функций*⁶. Замечательные пределы.

9. Производная функции одного переменного. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменного. Функции, заданные параметрически, их дифференцирование.

10. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n -й производной произведения функций. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменного.

11. Теорема Ферма (необходимое условие существования локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. *Следствие из теоремы Лагранжа о среднем об отсутствии у производной разрывов первого рода*⁷. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Основные разложения по формуле Тейлора. Правило Лопиталья для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталья для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$. *Теорема о промежуточных значениях производной (теорема Дарбу)*⁸.

12. Применение производной к исследованию функций. Необходимые условия и достаточные условия монотонности, достаточные условия существования локального экстремума в терминах первой, второй и высших производных. Выпуклость, точки перегиба. Необходимые условия и достаточные условия выпуклости. Асимптоты.

13. Кривые на плоскости и в пространстве. Гладкая кривая, касательная к гладкой кривой, допустимая замена параметра. Оценка приращения вектор-функции через производную. Длина кривой. *Функции ограниченной вариации*⁹. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой.

⁶ Для потоков О.В. Бесова и В.Ж. Сакбаева.

⁷ Для потока А.И. Тюленева.

⁸ Для потока А.Л. Лукашова.

⁹ Для потока А.Л. Лукашова.