

## Экзаменационная программа по курсу

### «Введение в математический анализ»,

#### осенний семестр 2020–2021 учебного года

1. Действительные числа. *Парадокс Рассела, теорема непрерывности и теорема Дедекинда* (для потока А.П. Черняева). Теорема о существовании и единственности (точной) верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу). Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.
2. Предел числовой последовательности. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Единственность предела. *Бесконечно малые последовательности и их свойства* (для всех, кроме потока Е.Ю. Редкозубовой). Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности. *Число  $\epsilon$*  (для всех, кроме потоков Г.Е. Иванова и Е.Ю. Редкозубовой). Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства.
3. Подпоследовательности, частичные пределы. Теорема Больцано– Вейерштрасса. Критерий Коши существования конечного предела последовательности.
4. Определения предела числовой функции одного переменного в терминах окрестностей и в терминах последовательностей, их эквивалентность. Свойства пределов функции. Критерий Коши существования конечного предела функции. Предел сложной функции. Существование односторонних пределов у монотонных функций.
5. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке. Односторонняя непрерывность. Непрерывность сложной функции. *Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции* (для всех, кроме потока Е.Ю. Редкозубовой и А.П. Черняева). Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.
6. Свойства функций, непрерывных на отрезке — ограниченность, достижимость (точных) верхней и нижней граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема об обратной функции.
7. (Весь раздел для потоков Я.М. Дымарского, Л.Н. Знаменской и Е.Ю. Редкозубовой без доказательств) *Определение и свойства экспоненты, показательной функции, логарифмической и степенной функций. Непрерывность элементарных функций. Второй замечательный предел.*
8. Производная функции одного переменного. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций.

Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменного. Функции, заданные параметрически, их дифференцирование.

9. Производные высших порядков. Формула Лейбница для  $n$ -й производной произведения функций. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменного.

10. Теорема Ферма (необходимое условие существования локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Основные разложения по формуле Тейлора. Правило Лопиталья для раскрытия неопределенностей вида  $\frac{0}{0}$ . *Правило Лопиталья для раскрытия неопределенностей вида  $\frac{\infty}{\infty}$*  (для потока Я.М. Дымарского - без доказательства). *Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной* (для потока Я.М. Дымарского).

11. Применение производной к исследованию функций. Необходимые условия и достаточные условия монотонности, достаточные условия существования локального экстремума в терминах первой, второй и высших производных. Выпуклость, точки перегиба. Необходимые условия и достаточные условия выпуклости. *Теорема о непрерывности и почти дифференцируемости выпуклой на интервале функции* (для потока Я.М. Дымарского). Асимптоты.

12. (Весь раздел для потоков М.О. Голубева и Г.Е. Иванова) *Линейные пространства. Евклидовы пространства. Нормированные пространства. Арифметическое  $n$ -мерное пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах, их свойства, связанные с операциями пересечения и объединения.*

13. (Весь раздел для потока Г.Е. Иванова) *Критерий компактности множества в  $R^n$ . Лемма Гейне-Бореля. Критерий компактности Гейне-Бореля. Метрические пространства и свойства непрерывных функций в метрических пространствах.*

14. Равномерная непрерывность функции, непрерывной на отрезке.

15. Кривые на плоскости и в пространстве. *Теорема Лагранжа о среднем для вектор-функции* (для потоков Г.Е. Иванова, Л.Н. Знаменской и Е.Ю. Редкозубовой). Гладкая кривая, касательная к гладкой кривой, допустимая замена параметра. Длина кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой.