

**Экзаменационная программа по
Введению в математический анализ,
осенний семестр 2019–2020 учебного года**

(для всех студентов, кроме студентов групп Б02-920, Б02-921, ..., Б02-929)

1. Действительные числа. Теорема о существовании и единственности (точной) верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу). Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.

2. Предел числовой последовательности. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Единственность предела. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности. Число ε . Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства.

3. Подпоследовательности, частичные пределы. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Критерий Коши существования конечного предела последовательности. *Теорема о верхнем и нижнем пределах*¹. *Теорема о трёх определениях верхнего и нижнего пределов*².

4. Определения предела числовой функции одного переменного в терминах окрестностей и в терминах последовательностей, их эквивалентность. Свойства пределов функции. Критерий Коши существования конечного предела функции. *Предел сложной функции*³. Теорема о замене переменного под знаком предела. Существование односторонних пределов у монотонных функций.

5. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке. Односторонняя непрерывность. Непрерывность сложной функции. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.

6. Свойства функций, непрерывных на отрезке — ограниченность, достижимость (точных) верхней и нижней граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Равномерная непрерывность функции, непрерывной на отрезке, *модуль непрерывности*⁴. Теорема об обратной функции.

7. Непрерывность элементарных функций. Определение и свойства показательной функции, *логарифмической и степенной функций*⁵. За-

¹Для потока О.В. Бесова.

²Для потока А.Л. Лукашова

³Для потока О.В. Бесова.

⁴Для потока О.В. Бесова

⁵Для потоков Б.И. Голубова, О.В. Бесова и В.Ж. Сакбаева.

мечательные пределы.

8. Производная функции одного переменного. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменного. Функции, заданные параметрически, их дифференцирование.

9. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n -й производной произведения функций. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменного.

10. Теорема Ферма (необходимое условие существования локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Основные разложения по формуле Тейлора. Правило Лопиталья для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталья для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$. *Теорема о промежуточных значениях производной (теорема Дарбу)*⁶.

11. Применение производной к исследованию функций. Необходимые условия и достаточные условия монотонности, достаточные условия существования локального экстремума в терминах первой, второй и высших производных. Выпуклость, точки перегиба. Необходимые условия и достаточные условия выпуклости. Асимптоты.

12. Кривые на плоскости и в пространстве. Гладкая кривая, касательная к гладкой кривой, допустимая замена параметра. Оценка приращения вектор-функции через производную. Длина кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой.

⁶Для потока А.Л. Лукашова.