Экзаменационная программа
Введение в математический анализ
осенний семестр 2020/21 уч.г., ФИВТ

1. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ как полное упорядоченное поле. Точные грани числовых множеств. Принцип полноты Вейерштрасса. Аксиома Архимеда.

2. Предел числовой последовательности: единственность, ограниченность. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Бесконечные пределы. Теорема о пределе монотонной последовательности. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Частичные пределы, теорема о верхнем и нижнем пределах. Фундаментальные последовательности и критерий Коши.

3. Открытые и замкнутые подмножества числовой прямой и их свойства. Предельные точки множества, критерии замкнутости. Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.

4. Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне, их равносильность. Свойства пределов функции. Предел композиции. Критерий Коши существования предела функции. Односторонние пределы функции, теорема об односторонних пределах монотонной функции.

5. Непрерывность функции в точке. Равносильные определения непрерывности. Непрерывность композиции. Точки разрыва, их классификация. Теорема о разрывах монотонной функции.

6. Теорема Вейерштрасса об ограниченности и достижимости точных граней непрерывной на отрезке функции. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Непрерывность монотонной функции, отображающей промежуток на промежуток. Теорема об обратной функции. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности. Экспонента и ее свойства. Второй замечательный предел. O-символика.

7. Дифференцируемость функции в точке, производная и дифференциал. Непрерывность дифференцируемой функции. Односторонние производные. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Теорема о производной композиции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменного. Теорема о производной обратной функции. Производные основных элементарных функций.

8. Локальные экстремумы. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля. Теоремы Лагранжа и Коши о среднем значении. Условия монотонности дифференцируемой функции. Достаточное условие экстремума функции в терминах первой производной. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.

9. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n-й производной произведения функций. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Разложения в нуле функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^\alpha$. Достаточное условие локального экстремума в терминах высших производных. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Выпуклые функции. Дифференциальные условия выпуклости.

10. Пространство $\mathbb{R}^n$. Предел и производная вектор-функции. Теорема Лагранжа для вектор-функций. Параметризованная кривая и путь в $\mathbb{R}^n$. Длина кривой. Аддитивность длины кривой. Достаточное условие спрямляемости. Дифференцируемость переменной длины дуги кривой. Натуральная параметризация. Кривизна кривой, формула для ее вычисления.

11. Определенный интеграл Римана. Линейность и монотонность интеграла. Верхние и нижние суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости Дарбу. Интегрируемость по подотрезкам. Аддитивность интеграла. Интегрируемость произведения и модуля интегрируемых функций. Интегральная теорема о среднем. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных функций и ограниченных функций с конечным числом точек разрыва. Интеграл с переменным верхним пределом: непрерывность и дифференцируемость. Формула Ньютона–Лейбница. Замена переменой в интеграле. Интегрирование по частям.