

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА по курсу «Введение в математический анализ»

1 курс, 1 семестр, 2021/2022 уч.г., (ЛФИ)

(Поток Карасева Р.Н.)

Множества и действительные числа

- 1) Натуральные, целые, рациональные числа.
- 2) Основные понятия теории множеств. Объединение, пересечение и декартово произведение. Отображения и последовательности.
- 3) Пределы и фундаментальные последовательности рациональных чисел, определение действительных чисел.
- 4) Арифметические операции и сравнение действительных чисел.
- 5) Предел последовательности действительных чисел. Полнота множества действительных чисел (критерий Коши).

Свойства пределов последовательностей

- 6) Бесконечные пределы. Существование предела монотонной последовательности.
- 7) Переход к пределу в неравенствах, единственность предела последовательности.
- 8) Существование общей точки последовательности вложенных отрезков. Единственность общей точки для стягивающейся последовательности.
- 9) Точные грани числовых множеств: определение, существование и единственность. Другие определения действительных чисел.
- 10) Бесконечно малые последовательности и их свойства. Предел суммы, разности, произведения и частного.

Определение элементарных функций

- 11) Неравенство Бернулли, экспонента и логарифм.
- 12) Тригонометрические функции, их определение и свойства. Неравенства $|\sin t| < |t| < |\operatorname{tg} t|$ при $0 < |t| < \frac{\pi}{2}$.

Частичные пределы, топология на прямой и мощности

- 13) Частичные пределы, верхний и нижний пределы. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Теорема о единственном частичном пределе.
- 14) Топология на множестве действительных чисел. Открытые, замкнутые и компактные множества. Критерий компактности.
- 15) Биекции и мощность множеств. Сравнение мощностей.
- 16) Теоремы о счётности множества \mathbb{Q} рациональных чисел и несчётности множества \mathbb{R} действительных чисел.

Непрерывные функции и их свойства

- 17) Непрерывность функции в точке. Определение по Коши и по Гейне.
- 18) Непрерывность суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций.
- 19) Теорема о непрерывности композиции функций.
- 20) Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции.
- 21) Непрерывность монотонного отображения промежутка на промежуток. Непрерывность обратной функции.
- 22) Топологическое определение непрерывности функции и его эквивалентность другим определениям.
- 23) Свойства функций, непрерывных на компактных множествах.

Пределы функций

- 24) Два определения предела функции (по Коши и по Гейне). Их эквивалентность.
- 25) Свойства пределов функций, связанные с неравенствами и арифметическими операциями.
- 26) Односторонние пределы. Теорема об односторонних пределах монотонных функций.
- 27) Критерий Коши существования предела функции.
- 28) Сравнение асимптотического поведения функций. Порядок функции, асимптотическая эквивалентность, символы o и O .

Производная и её свойства

- 29) Определение и геометрический смысл производной. Производные функций $\sin x$, $\cos x$, a^x , $\log_a x$.
- 30) Линейное приближение и дифференциал функции. Непрерывность дифференцируемой функции.
- 31) Производная суммы, разности, произведения и частного.
- 32) Производная композиции функций. Производная функции x^α .
- 33) Производная обратимой функции. Производные обратных тригонометрических функций.

Исследование функций с помощью производной

- 34) Локальные экстремумы. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля.
- 35) Теоремы Лагранжа и Коши о среднем значении.
- 36) Условия постоянства, возрастания и убывания дифференцируемой функции.
- 37) Достаточные условия экстремума дифференцируемой функции.
- 38) Достаточное условие выпуклости дифференцируемой функции.
- 39) Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей вида $0/0$.
- 40) Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей вида ∞/∞ .

Производные высших порядков

- 41) Формула Лейбница для n -й производной произведения двух функций.
- 42) Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
- 43) Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
- 44) Разложения по формуле Тейлора элементарных функций: e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

Метрические пространства, их подмножества и топология

- 45) Метрические пространства, пределы последовательностей точек и полнота.
- 46) Евклидовы n -мерные пространства. Неравенства Коши–Буняковского–Шварца и треугольника, полнота евклидова пространства.
- 47) Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах и их свойства.
- 48) Внутренность, замыкание и граница подмножества метрического пространства. Открытость внутренности, замкнутость замыкания и границы.
- 49) Индуцированная метрика и топология на подмножествах метрического пространства, относительно замкнутые и открытые множества.
- 50) Связные множества в метрических пространствах. Описание связных подмножеств числовой прямой.
- 51) Компактные множества в метрическом пространстве и критерий компактности в евклидовом пространстве.
- 52) Компактность и секвенциальная компактность в метрических пространствах.

Непрерывные отображения метрических пространств

- 53) Непрерывные отображения метрических пространств. Определение непрерывности в точке по Коши и по Гейне. Топологическое определение непрерывности на множестве.
- 54) Свойства непрерывных отображений, определённых на компакте и на связных множествах.
- 55) Расстояние между точкой и множеством и между двумя множествами в метрическом пространстве. Достаточное условие достижимости расстояния между множествами в евклидовом пространстве.
- 56) Кривые в метрическом пространстве и их конкатенация. Линейная связность метрического пространства, её сравнение со связностью и сохранение линейной связности при непрерывных отображениях.
- 57) Равномерно непрерывные отображения метрических пространств, модуль непрерывности. Теорема о равномерной непрерывности отображения на компакте.
- 58) Полунепрерывные функции, достаточные условия достижимости минимума на компакте. Колебание функции в точке и его полунепрерывность.

Длина кривой в метрическом пространстве

- 59) Определение и свойство аддитивности длины дуги кривой.
- 60) Спряжляемые кривые. Непрерывная зависимость длины дуги кривой от параметра, натуральная параметризация кривой.
- 61) Спряжляемость непрерывно дифференцируемой кривой в евклидовом пространстве. Производная длины дуги по параметру.
- 62) Кривизна и формулы Френе для кривой на евклидовой плоскости. Радиус кривизны, центр кривизны и эволюта.
- 63) Кривизна, главная нормаль и бинормаль кривой в \mathbb{R}^3 . Кручение и формулы Френе для кривой ненулевой кривизны.

Многочлены с комплексными коэффициентами

- 64) Теорема о существовании комплексного корня многочлена с комплексными коэффициентами. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители.
- 65) Деление многочленов с остатком. Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя многочленов. Разложение рациональной функции на элементарные дроби.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Н. Карасёв. *Отдельные темы математического анализа*. rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf, 2018.
- [2] Г. Н. Яковлев. *Лекции по математическому анализу. Ч. 1*. М.: Физматлит, 2004.
- [3] С. М. Никольский. *Курс математического анализа. Т. 1*. Москва, Наука, 2000.