ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА
по курсу «Алгебра и геометрия»
1 курс, 1 семестр
ФИВТ (Поток Штепина В.В.)

Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

1. Коллинеарные, компланарные векторы. Линейные операции с векторами и их свойства. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Базис, координаты вектора в базисе. Описание базисов на плоскости и в пространстве. Действия над векторами в координатах. Связь между линейной зависимостью, коллинеарностью и компланарностью векторов. Изменение координат при замене базиса.

2. Общая декартова система координат, прямоугольная (ортонормированная) система координат. Связь между координатами направленного отрезка и координатами его конца и начала, задание отрезка и прямой в декартовой системе координат. Замена декартовой системы координат, формулы перехода.

3. Скалярное произведение, его свойства, выражение в ортонормированном и произвольном базисе. Формулы для определения расстояния между точками и угла между векторами.

4. Ориентация на плоскости и в пространстве. Ориентированные площадь и объём (смешанное произведение). Свойства ориентированных площади и объёма. Выражение ориентированных площади и объёма в произвольном базисе.

5. Векторное произведение, его свойства, выражение в правом ортонормированном базисе. Критерии коллинеарности и компланарности векторов. Двойное векторное произведение.

6. Понятие об уравнении множества. Алгебраические линии и поверхности; пересечение и объединение алгебраических линий (поверхностей). Сохранение порядка при переходе к другой системе координат.

7. Прямая на плоскости, различные способы задания, их эквивалентность. Формула для расстояния от точки до прямой в прямоугольной системе координат. Условия пересечения и параллельности двух прямых. Пучок прямых.

8. Плоскость в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Условие параллельности двух плоскостей. Направляющий вектор пересечения двух плоскостей. Пучок плоскостей.

9. Прямая в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Формулы для расстояния от точки до плоскости и расстояния между скрещивающимися прямыми в прямоугольной системе координат.

10. Эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения. Теоремы о фокусах и директрисах. Асимптоты гиперболы. Сопряжённые диаметры.

11. Вывод общего уравнения касательной к кривой второго порядка. Касательные к эллипсу, параболе и гиперболе.

12. Классификация линий второго порядка. Приведение уравнения второго порядка с двумя переменными к каноническому виду в прямоугольной системе координат. Центр многочлена второго порядка.

13. Инварианты кривой второго порядка.

Линейные пространства. Матрицы и определители

1. Матрицы, операции с матрицами, их свойства.

2. Понятия группы, кольца и поля, примеры. Поле комплексных чисел. Характеристика поля, простое подполе. Группа перестановок, знак перестановки. Изоморфизм групп, теорема Кэли. Порядок элемента. Циклические группы, их подгруппы. Теорема Лагранжа о порядке подгруппы, её следствия.

3. Линейное пространство. Понятие линейно (не)зависимой системы векторов. Подпространство линейного пространства. Линейная оболочка системы векторов, её характеризация.

4. Системы линейных уравнений. Элементарные преобразования строк и столбцов матрицы, элементарные матрицы, их свойства. Приведение матрицы к ступенчатому и упрощенному виду. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Основная лемма о линейной зависимости. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы.

5. Базис и размерность линейного пространства, их свойства. Теорема об изоморфизме. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты. Изменение координат вектора при изменении базиса. Матрица перехода. Мощность конечного векторного пространства и конечного поля.

6. Ранг системы векторов, его связь с размерностью линейной оболочки. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Ранг произведения матриц. Теорема о базисном миноре. Нахождение ранга с помощью элементарных преобразований. Теорема Кронекера–Капелли. Невырожденные и обратимые матрицы. Нахождение обратной матрицы при помощи элементарных преобразований.

7. Подпространства в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств, её характеризации. Прямое дополнение подпространства. Связь размерностей суммы и пересечения подпространств.

8. Линейные функции (функционалы). Сопряжённое (двойственное) пространство, его размерность. Взаимный (биортогональный) базис, координаты в нём, замена координат при замене базиса. Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряженного к нему. Аннуляторные подпространства, их свойства.

9. Линейные отображения и линейные преобразования (операторы) линейного пространства. Их матрицы. Ядро и образ линейного отображения, их размерности. Критерий инъективности линейного отображения. Операции над линейными преобразованиями и их матрицами. Изменение матриц линейного отображения и линейного преобразования при замене базисов.

10. Полилинейные и кососимметричные функции. Определитель матрицы, задание определителя его свойствами, явное выражение определителя через элементы матрицы. Поведение определителя при элементарных преобразованиях. Определитель произведения матриц и транспонированной матрицы. Определитель с углом нулей.

11. Миноры и их алгебраические дополнения. Теорема о произведении минора на его алгебраическое дополнение. Теорема Лапласа. Разложение определителя по строке, столбцу. Теорема Крамера. Формула обратной матрицы.