# ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА
# по курсу «Аналитическая геометрия»
## 1 курс, 1 семестр (ЛФИ)
## (Поток Кожевникова П.А.)

**I. Введение.**

Матрицы и детерминанты малых размеров. Системы линейных уравнений. Множества. Логика. Индукция.

**II. Векторы и декартовы системы координат (ДСК) на плоскости и в пространстве.**

1. Линейные операции с векторами и их свойства. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Связь между линейной зависимостью, коллинеарностью и компланарностью векторов. Базис, координаты вектора в базисе. Изменение координат при замене базиса.

2. Скалярное произведение, его свойства. Проекция вектора на направление. Выражение скалярного произведения в ортонормированном и произвольном базисе. Вычисление длины вектора и угла между векторами.

3. Левые и правые тройки векторов. Ориентированный объём параллелепипеда (смешанное произведение). Свойства смешанного произведения. Выражение смешанного произведения в произвольном базисе. Критерий компланарности.

4. Векторное произведение, его свойства, выражение в правом ортонормированном базисе. Вычисление площадей, перпендикуляр к паре векторов. Двойное векторное произведение.

5. Общая декартова система координат, прямоугольная система координат. Замена декартовой системы координат, формулы перехода. Полярная, цилиндрическая, сферическая системы координат.

**III. Многочлены-1.**

1. $\mathbb{R}[X]$. Степень многочлена. Сложение, умножение, деление с остатком.

2. Корни многочлена. Теорема Безу. Кратность корня, число корней с учетом кратности не превосходит степени. Формальное и функциональное равенство многочленов. Теорема Виета.

3. Многочлены от нескольких переменных. Степень, ее инвариантность относительно линейной замены. Лемма о старшем члене.

4. Понятие уравнения множества. Алгебраические множества (линии и поверхности); пересечение и объединение алгебраических множеств. Порядок, сохранение порядка при переходе к другой системе координат. Пересечение алгебраического множества с прямой и с плоскостью.

**IV. Системы координат. Прямые и плоскости. Эллипс, гипербола, парабола. Поверхности.**

1. Прямая на плоскости, различные способы задания, их эквивалентность. Линейное неравенство. Пучок прямых. Формула расстояния от точки до прямой.

2. Плоскость в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Взаимное расположение двух и трех плоскостей. Линейное неравенство. Пучок плоскостей. Формула расстояния от точки до плоскости.

3. Прямая в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Взаимное расположение двух прямых. Формулы для расстояния от точки до прямой (в пространстве) и между скрещивающимися прямыми.

4. Эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения. Теоремы о фокусах и директрисах. Касательные. Оптическое свойство.

5. Цилиндрические, конические поверхности, поверхности вращения. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды. Прямолинейные образующие.

## V. Матрицы. Элементарные преобразования.

1. Сложение матриц, умножение матрицы на число. Транспонирование. След матрицы.

2. Линейные комбинации, линейная оболочка систем векторов-столбцов (или матриц). Линейная зависимость. Ранг. Базисная подсистема. Основная теорема о рангах. Стандартный и треугольный базис в $\mathbb{R}^n$. Строчный и столбцовый ранг матрицы. Оценка ранга суммы матриц.

3. Умножение матриц, его свойства. Суммирование, его тензорная запись. Отсутствие коммутативности умножения. Единичная матрица. Обратимые матрицы. Ранг произведения.

4. Элементарные преобразования строк и столбцов. Элементарные матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому и упрощенному (улучшенному ступенчатому) виду методом Гаусса.

5. Элементарные преобразования строк не меняют линейных соотношений между столбцами. Инвариантность строчного и столбцового ранга при элементарных преобразованиях. Теорема о ранге матрицы.

6. Невырожденные матрицы. Критерий обратимости-1 (невырожденность = обратимость). Алгоритм нахождения обратной матрицы элементарными преобразованиями. Базисный минор (невырожденность подматриц на пересечение системы $r = \mathrm{rg}\ A$ линейно независимых строк и столбцов).

## VI. Системы линейных уравнений (СЛУ).

1. СЛУ. Разные виды заданий: матричное уравнение, линейная комбинация столбцов, матрица коэффициентов и расширенная матрица. Критерий совместности Кронекера-Капелли.

2. Однородные СЛУ, фундаментальная система решений (ФСР) и общее решение однородной СЛУ. Структура общего решения СЛУ. Алгоритм решения СЛУ методом Гаусса. Мощность ФСР $= n - \mathrm{rg}\ A$.

3. Восстановление СЛУ по множеству решений. Любая линейная оболочка — множество решений некоторой однородной СЛУ.

## VII. Абстрактные отображения.

Понятие отображения и преобразования. Терминология. Примеры. Отношение эквивалентности. Бинарные операции на множестве.

## VIII. Группы.

1. Понятия полугруппы и группы. Абелевы группы. Аддитивная и мультипликативная форма записи. Порядок группы. Определения изоморфизма, гомоморфизма. Прямое произведение (прямая сумма). Обратимые элементы полугруппы. Подгруппы. Порождающие множества.

2. Примеры: числа по сложению и умножению; матрицы по сложению и умножению. Группы преобразований. Понятие действия группы на множестве. Понятие о представлении группы.

3. Порядок элемента. Циклические группы, их классификация. Количество порождающих элементов в $(\mathbb{Z}_n, +)$ равно $\varphi(n)$. Подгруппы циклической группы.

4. Симметрическая группа $S_n$. Независимые циклы. Число инверсий, четность перестановки. Знакопеременная подгруппа $A_n$.

5. Левые смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа, ее следствия: порядок элемента — делитель порядка группы; описание групп простого порядка; теоремы Ферма и Эйлера (в теории чисел).

## IX. Кольца и поля.

1. Теория делимости в $\mathbb{Z}$. Простые числа. НОД. Алгоритм Евклида, линейное представление НОД. Разложение на простые множители и его единственность. Китайская теорема об остатках.

2. Арифметика по модулю $n$. Кольцо $\mathbb{Z}_n$. $\mathbb{Z}_{km} \cong \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_m$ при $(k, m) = 1$. $\mathbb{Z}_n$ — поле тогда и только тогда, когда $n$ — простое. Характеристика поля.

3. Поле комплексных чисел, сопряжение. Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая запись. Умножение, возведение в степень, обращение. Извлечение корней. Группа корней $n$-й степени из 1. Матрицы с комплексными коэффициентами.

4. Кольцо $\mathbb{F}[X]$ многочленов над произвольным полем. Неприводимые многочлены, НОД. Разложение на неприводимые сомножители и его единственность. Неприводимые многочлены над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$.

## X. Определитель.

1. Детерминант (определитель) матрицы как полилинейная и кососимметричная функция столбцов. Явная формула (через элементы матрицы).

2. Изменение определителя при элементарных преобразованиях столбцов. Определитель треугольной матрицы. Критерий обратимости-2 ($\det \neq 0$). Определитель транспонированной матрицы.

3. Определитель произведения матриц. Определитель матрицы с углом нулей. Разложение определителя по строке, столбцу.

4. Правило Крамера для решения СЛУ (с невырожденной матрицей коэффициентов), формула обратной матрицы.