

**Экзаменационная программа**  
**по дисциплине «Многомерный анализ, интегралы и ряды»**  
**для всех факультетов кроме ФОПФ,**  
**весенний семестр 2017–2018 учебного года**

**1.** Предел последовательности точек в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. Внутренние, предельные, изолированные точки множества. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества. (Для потока А.Л. Лукашова: компактные множества. Критерий компактности.)

**2.** Предел числовой функции нескольких переменных. Предел функции по множеству. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству. Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижимость (точных) нижней и верхней граней, равномерная непрерывность (теорема Кантора). Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.

**3.** Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных. Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных. Производная по направлению и градиент, их связь и геометрический смысл. (Для потоков О.В. Бесова и А.Л. Лукашова: независимость градиента дифференцируемой функции от выбора прямоугольной системы координат.)

**4.** Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. (Для потока А.Л. Лукашова: теоремы Шварца и Юнга.) Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано.

**5.** Определение измеримости по Жордану множества в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Критерий измеримости. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Жордана.

(Для потока О.В. Бесова: измеримость и мера графика непрерывной на компакте функции.)

**6.** Определенный интеграл Римана. Верхние и нижние суммы Дарбу. (Кроме потока О.В. Бесова: свойства сумм Дарбу.) Критерии интегрируемости.

Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции, ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем. Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференцируемость. Формула Ньютона–Лейбница. Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле. (Для потока А.Л. Лукашова: вторая теорема о среднем. Интегрируемость сложной функции.)

**7.** Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой, площадь поверхности вращения (без доказательства). (Для потоков О.В. Бесова, Б.И. Голубова и А.Л. Лукашова: вычисление площади поверхности вращения (с доказательством).)

8. Ориентация гладкой кривой. Криволинейные интегралы первого и второго рода.

9. Несобственный интеграл. Критерий Коши сходимости интеграла. Интегралы от знакопостоянных функций, признак сравнения. Интегралы от знакопеременных функций, сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов. (Для потока А.Л. Лукашова: признак Харди.)

10. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды: признак сравнения, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды, сходимость и абсолютная сходимость, признаки Лейбница, Дирихле и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Произведение абсолютно сходящихся рядов. (Для потока А.Л. Лукашова: теорема Мертенса.) Теорема Римана о перестановке членов ряда сходящегося, но не абсолютно сходящегося (без доказательства).

11. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

12. Степенные ряды с комплексными членами. Круг и радиус сходимости. Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости. Формула Коши–Адамара. Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при почленном дифференцировании и интегрировании ряда. (Кроме потока О.В. Бесова) Первая теорема Абеля. (Для потоков А.Л. Лукашова и А.Ю. Петровича: вторая теорема Абеля.)

13. Степенные ряды с действительными членами. (Для потока А.Ю. Петровича: непрерывность суммы степенного ряда на множестве точек сходимости.) Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости. Единственность представления функции степенным рядом. (Кроме потока О.В. Бесова: достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд.)

Ряд Тейлора. (Кроме потока А.Ю. Петровича: формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.) Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций:  $e^x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$ . Разложение в степенной ряд функции  $e^z$  комплексного переменного  $z$ , формулы Эйлера.