

Экзаменационная программа
по линейной алгебре для всех факультетов кроме ФОПФ,
весенний семестр 2017–2018 учебного года

1. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Теорема о базисном миноре.
2. Системы линейных уравнений. Теорема Фредгольма. Фундаментальная система решений. Общее решение системы линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли.
3. Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Размерность и базис.
4. Разложение по базису в линейном пространстве. Координатное представление элементов линейного пространства и операций с ними. Теорема об изоморфизме. Матрица перехода. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве.
5. Подпространства в линейном пространстве. Способы задания подпространств. Сумма и пересечение подпространств. Формула размерности суммы двух подпространств. Прямая сумма.
6. Линейные отображения и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и множество значений. Ранг линейного отображения. Условия инъективности и сюръективности. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование.
7. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в координатной форме. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. (Для потока О.К. Подлипского: простейший вид матрицы линейного отображения.)
8. Инвариантные подпространства линейных преобразований. Ограничение преобразования на инвариантном подпространстве. Собственные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.
9. Характеристическое уравнение. Инвариантность характеристического многочлена. (Для потоков О.К. Подлипского и И.А. Чубарова: выражение определителя и следа матрицы через корни характеристического многочлена.) Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализуемости матрицы линейного преобразования.
10. (Для потоков О.К. Подлипского и И.А. Чубарова: теорема Гамильтона–Кэли. Существование двумерного инвариантного подпространства, отвечающего комплексному корню характеристического многочлена линейного преобразования вещественного линейного пространства.)
11. Линейные функции. (Кроме потока Д.А. Терёшина: сопряженное пространство.) (Для потока А.И. Чубарова: биортогональный базис. Простран-

ство, сопряженное сопряженному пространству.) (Для потока Д.А. Терёшина: Координатная строка и ее изменение при замене базиса.)

12. Билинейные и квадратичные функции и формы. Их координатное представление. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.

13. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

14. Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее свойства. Ортогональные базисы. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональные матрицы. Процесс ортогонализации.

15. Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональное проектирование на подпространство.

16. Линейные преобразования евклидова пространства. Преобразование, сопряженное данному. Матрица сопряженного преобразования. Свойства сопряженного преобразования.

17. Самосопряженные преобразования. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования.

18. (Для потока Д.А. Терёшина: отображения, сохраняющие скалярное произведение. Изоморфизм евклидовых пространств.) Ортогональные преобразования, их матрицы. (Для потоков О.К. Подлипского и А.И. Чубарова: свойства ортогональных преобразований. Свойства корней характеристического многочлена и собственных векторов ортогональных преобразований.) (Для потока Д.А. Терёшина: преобразование, сопряженное ортогональному.)

19. (Для потоков О.К. Подлипского и И.А. Чубарова: полярное разложение линейных преобразований евклидова пространства. Сингулярное разложение.)

20. Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых положительно определена.

21. (Для потока А.И. Чубарова: Унитарное пространство и его аксиоматика. Унитарные и эрмитовы матрицы. Эрмитовы формы.)

22. (Для потока А.И. Чубарова: понятие о тензорах. Основные тензорные операции. Описание тензоров малых валентностей.)