

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу «Линейная алгебра»

1 курс, весенний семестр, 2017/2018 уч.г.

(ФОПФ)

(Поток Кожевникова П.А.)

I. Векторные пространства.

1. Векторное пространство. Подпространство. Линейная оболочка системы векторов. Линейно (не)зависимые системы векторов. Ранг системы векторов, его связь с размерностью линейной оболочки.
2. Базис и размерность линейного пространства. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты. Изменение координат вектора при замене базиса. Матрица перехода.
3. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств, её характеристики, прямое дополнение подпространства, проекция на подпространство вдоль прямого дополнения. Связь размерностей суммы и пересечения подпространств. Понятие внешней прямой суммы и факторпространства.
4. Понятие аффинного пространства, связь между аффинным и векторным пространством.

II. Линейные отображения.

1. Линейные отображения и линейные преобразования векторных пространств. Операции над линейными отображениями, линейное пространство линейных отображений. Алгебра линейных операторов. Изоморфизмы. Теорема об изоморфизме.
2. Матрица линейного отображения. Координатная запись линейного отображения. Связь операций над матрицами и над линейными отображениями. Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базиса.
3. Ядро и образ, их описание в терминах матрицы линейного отображения. Критерий инъективности. Связь между размерностями ядра и образа.
4. Аффинные преобразования плоскости, их свойства.

III. Структура линейного преобразования.

1. Инвариантные подпространства.
2. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен и его инвариантность. Определитель и след преобразования.
3. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих попарно различным собственным значениям. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Условия диагонализуемости преобразования.
4. Инвариантные подпространства малой размерности в комплексном и вещественном случаях.
5. Корневые подпространства. Теорема Гамильтона–Кэли.
6. Жорданова нормальная форма, ее существование и единственность. Минимальный многочлен. Связь с линейными дифференциальными уравнениями и линейными рекуррентными соотношениями.

IV. Билинейные формы.

1. Билинейные (полуторалинейные) формы. Координатная запись билинейной формы. Матрица билинейной формы и ее изменение при замене базиса.
2. Симметричные билинейные (полуторалинейные) формы. Взаимно-однозначное соответствие с квадратичными (эрмитовыми) формами. Приведение квадратичной формы к диагональному и каноническому виду (двойные элементарные преобразования матрицы).

3. Закон инерции квадратичной (эрмитовой) формы. Знакоопределенные и полуопределенные формы, их диагональный вид. Критерий Сильвестра.
4. Кососимметричные билинейные функции, приведение их к каноническому виду.

V. Пространства со скалярным произведением.

1. Евклидово и унитарное пространства. Матрица Грама и ее свойства. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца, неравенство треугольника. Метрика. Выражение скалярного произведения в координатах.
2. Ортогональные системы векторов и подпространств. Существование ортонормированных базисов (ОНБ). Изоморфизм евклидовых пространств. Переход от ОНБ к ОНБ. Ортогональные и унитарные матрицы.
3. Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональная проекция. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
4. Преобразование, сопряженное данному. Его существование и единственность, его матрица в ОНБ. Теорема Фредгольма.
5. Самосопряженные линейные преобразования. Свойства самосопряженных преобразований, существование ОНБ из собственных векторов.
6. Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства. Канонический вид унитарного (ортогонального) преобразования.
7. Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве.
8. Квадратичные (эрмитовы) формы в евклидовых (унитарных) пространствах, приведение к диагональному виду. Применение к классификации кривых второго порядка. Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду.
9. Понятие пространств с не положительно определенным скалярным произведением.

VI. Сопряженное пространство.

1. Линейные функции. Сопряженное пространство, его размерность. Биортогональный базис. Замена биортогональных базисов. Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряженного к нему. Канонический изоморфизм евклидова пространства и сопряженного к нему.
2. Биортогональное дополнение, соответствие между подпространствами в V и V^* . Сопряженное отображение, его свойства.

VII. Тензоры.

1. Полилинейные отображения. Определение тензора типа (p, q) , координатная запись. Изменение компонент тензора при замене базиса.
2. Пространство тензоров типа (p, q) . Основные тензорные операции: умножение, перестановка индексов, свертка. Метрический тензор и тензоры в евклидовых пространствах.
3. Симметричные и кососимметричные тензоры. Симметризация и альтернирование. Внешние формы.