ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА
по курсу «Функциональный анализ и его приложения»
3 курс, 6 семестр, 2016/2017 уч.г.

(Поток Коновалова С.П.)

I. Метрические пространства.

1. Метрические и топологические пространства. Примеры: l_p, $C_p[a,b]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $C^n[a,b]$. Неравенства Гельдера и Минковского.

II. Полные метрические пространства.

2. Теорема о вложенных шарах.
3. Принцип сжимающих отображений.

III. Компактные метрические пространства.

4. Компактность и центрированные системы замкнутых множеств.
5. Критерий компактности.
6. Теорема Арцела–Асколи.

IV. Линейные нормированные пространства.

7. Теорема Рисса (некомпактность сферы в E, $\dim E = \infty$).
8. Характеристическое свойство евклидовых пространств. Банаховы и гильбертовы пространства.
9. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Понятие линейного топологического пространства, примеры.
10. Теорема Рисса о проекции.
11. Сепарабельные гильбертовы пространства.

V. Линейные ограниченные операторы в банаховом пространстве.

12. Связь непрерывности и ограниченности линейного оператора.
13. Топологии и сходимости в пространстве операторов $L(E_1,E_2)$. Норма оператора. Полнота нормированного пространства $L(E_1,E_2)$.
14. Задача о продолжении непрерывного отображения. Продолжение линейного ограниченного оператора на замыкание области определения.
15. Теорема Банаха–Штейнгауза.
16. Полнота пространства $L(E_1,E_2)$ относительно поточечной сходимости.

VI. Обратный оператор. Обратимость.

17. Обратимость линейного, ограниченного снизу ($\|Ax\| \geqslant k\|x\|$) оператора
18. Обратимость возмущённого оператора $A + \Delta A$.
19. Формулировка теоремы Банаха об обратном операторе. Резольвентное множество оператора, спектр оператора и его компоненты.

VII. Аналитические свойства резольвенты.

20. Операторнозначные функции комплексного переменного. Аналитичность резольвенты. Спектральный радиус.

VIII. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса–Фреше. Теорема Хана–Банаха.

21. Функционалы в гильбертовом пространстве. Теорема Рисса–Фреше.
22. Теорема Хана–Банаха, её следствия.

IX. Слабая сходимость в банаховом пространстве.

23. Изометричность вложения E в E^{**}. Критерий слабой сходимости последовательности.
24. Слабая сходимость и ограниченные операторы.

X. Мера и интеграл Лебега (основные конструкции).

25. Схема распространения меры с алгебры на σ-алгебру измеримых множеств (без доказательства).
26. Измеримые функции (без доказательства).
27. Интеграл Лебега (определение и основные свойства). Теоремы Лебега, Фату, Беппо Леви, Фубини (формулировки). Примеры применения этих теорем в курсе уравнений математической физики.
28. Пространства $L_p[a,b]$.

XI. Сопряжённый оператор.

29. Норма сопряжённого оператора.
30. Сопряжённые операторы в гильбертовом пространстве. Равенство $(\operatorname{Ker} A^*) = \overline{\operatorname{Im} A}$.

XII. Самосопряжённые операторы.

31. Свойства квадратичной формы (Ax,x) и собственных значений самосопряжённого оператора A.
32. Разложение гильбертова пространства $H = \operatorname{Ker}(A - \lambda I) \oplus \overline{\operatorname{Im}(A - \lambda I)}$, где A — самосопряжённый оператор.
33. Критерий принадлежности числа спектру. Вещественность спектра самосопряжённого оператора.
34. Теорема о спектре самосопряжённого оператора: $\sigma(A) \subseteq [m_-,m_+]$, $r(A) = \|A\|$.

XIII. Компактные операторы.

35. Свойства компактных операторов.
36. Свойства собственных значений компактного оператора.
37. Теорема Фредгольма для компактных самосопряжённых операторов.
38. Спектр компактного самосопряжённого оператора. Теорема Гильберта–Шмидта.

XIV. Элементы нелинейного анализа.

39. Производная Фреше, производная Гато. Формула конечных приращений.
40. Теорема Шаудера.

Литература

1. *А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин.* Элементы теории функций и функционального анализа.

2. *В.Хатсон, Дж.Пим.* Приложения функционального анализа и теории операторов.