ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА
по курсу «Уравнения математической физики»
3 курс, 6 семестр, 2017/2018 уч.г.

(Поток В.И. Зубова)

1. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с линейной старшей частью в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Классификация уравнений. Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду на плоскости.
2. Постановка задачи Коши для уравнения 2-го порядка с частными производными с линейной старшей частью в $\mathbb{R}^n$. Понятие о характеристической поверхности. Понятие о корректности задачи Коши. Пример Адамара некорректной задачи Коши для уравнения Лапласа.
3. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера. Область зависимости решения от начальных данных. Существование и единственность классического решения. Корректность постановки задачи.
4. Смешанная задача для колебаний полубесконечной струны с закрепленным концом. Условия согласования начальных и граничного данных. Существование и единственность классического решения.
5. Формула Пуассона–Кирхгофа решения задачи Коши для однородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$. Существование классического решения этой задачи.
6. Формула Кирхгофа решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$. Метод Дюамеля. Принцип Гюйгенса.
7. Формула Пуассона решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$. Метод спуска. Диффузия волн.
8. Теорема о единственности классического решения задачи Коши для волнового уравнения (на примере случая $\mathbb{R}^2$). Метод интеграла энергии.
9. Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^1$. Фундаментальное решение. Существование классического решения задачи Коши при непрерывной ограниченной начальной функции.
10. Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного и неоднородного уравнений теплопроводности в $\mathbb{R}^n$. Метод Дюамеля. Существование классического решения.
11. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теорема о единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в классе $M_2(T)$ (без доказательства).
12. Решение методом Фурье смешанной задачи для однородного уравнения теплопроводности на отрезке с однородными краевыми условиями Дирихле. Существование и единственность классического решения.
13. Метод Фурье решения смешанной задачи для уравнения колебаний струны с закрепленными концами. Обоснование метода для случая однородного уравнения.
14. Формулы Грина для оператора Лапласа. Постановка краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Единственность решения задачи Дирихле в классе $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Неединственность решения задачи Неймана и необходимое условие ее разрешимости.
15. Симметричность и положительная определенность оператора «$-\Delta$» при однородном граничном условии Дирихле. Положительность собственных значений и ортогональность собственных функций.
16. Решение методом Фурье задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Представление решения в виде ряда по однородным гармоническим многочленам и в виде интеграла Пуассона. Существование классического решения при непрерывной граничной функции.

17. Интегральное представление решений уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченной области. Фундаментальное решение уравнения Лапласа (случай $\mathbb{R}^3$).
18. Свойства гармонических функций в $\mathbb{R}^3$: бесконечная дифференцируемость, теорема о среднем. Обратная теорема о среднем.
19. Принцип максимума и минимума для гармонических функций. Единственность классического решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона при непрерывной граничной функции (в классе $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$).
20. Функция Грина задачи Дирихле (случай $\mathbb{R}^3$). Функция Грина для шара. Формула Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.
21. Теорема Лиувилля для гармонических функций (случай $\mathbb{R}^3$).
22. Теорема об устранимой особой точке для гармонических функций (случай $\mathbb{R}^3$).
23. Преобразование Кельвина и его свойства. Регулярность поведения гармонических функций на бесконечности. Единственность решения внешних задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа (случай $\mathbb{R}^3$).
24. Интегральные операторы с непрерывными и полярными ядрами в ограниченной области; их непрерывность в пространстве $C(\overline{G})$. Приближение операторов с полярными ядрами операторами с непрерывными ядрами.
25. Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с малым по норме интегральным оператором K. Представление решения рядом Неймана. Ограниченность оператора $(I - \lambda K)^{-1}$.
26. Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденными ядрами. Сведение к системе линейных алгебраических уравнений. Теоремы Фредгольма в этом случае.
27. Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода с непрерывными и полярными ядрами. Теоремы Фредгольма. Дискретность множества характеристических чисел.
28. Объемный ньютонов потенциал и его свойства. Убывание на бесконечности. Результат действия оператора Лапласа на объемный потенциал.
29. Понятие области с границей класса C^2. Потенциал простого слоя, его свойства. Непрерывность в $\mathbb{R}^3$.
30. Потенциал двойного слоя. Интеграл Гаусса. Скачок потенциала двойного слоя при переходе через поверхность, на которой задается плотность.
31. Понятие правильной нормальной производной. Существование правильной нормальной производной у потенциала простого слоя с непрерывной плотностью. Формула скачка для нормальной производной.
32. Сведение с помощью потенциалов внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям на границе. Существование и единственность решения этих задач.