ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

Уравнения математической физики, 2018-19 уч.г.

(Поток Р. В. Константинова, ФОПФ)

1. Постановка задачи Коши для гиперболического в заданной области линейного дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Полуклассическое решение этой задачи в характеристических переменных, его существование и единственность.

2. Пространства $\mathcal{D}(G)$ и $\mathcal{D}'(G)$ для открытого множества $G \subseteq \mathbb{R}^m$. Обобщённое дифференцирование в $\mathcal{D}'(G)$, теорема о равенстве обобщённых и классических производных порядка не выше N в $\mathcal{D}'(G) \cap C^N(G)$.

3. Постановка обобщённой задачи Коши в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$. Теорема о корректности обобщённого решения этой задачи: достаточно гладкое обобщённое решение является и классическим решением.

4. Нефинитность классического преобразования Фурье нетривиальной функции из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Пространство Л. Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и плотность $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ в нём. Классическое преобразование Фурье как линейное непрерывное преобразование пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и теорема обращения.

5. Пространство обобщённых функций $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Обобщённое преобразование Фурье в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ по всем или по части переменных, и его свойства, связанные с операцией обобщённого дифференцирования.

6. Свёртка обобщённых функций в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Лемма о дифференцировании действия обобщённой функции на гладко зависящую от параметра основную функцию. Дифференцирование свёртки обобщённых функций.

7. Лемма об интегрировании действия. Преобразование Фурье обобщённой функции как действие на комплексную экспоненту. Преобразование Фурье свёртки обобщённых функций.

8. Функция Грина линейного дифференциального оператора в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Достаточное условие существования единственной функции Грина. Функция Грина оператора $\Delta - k^2$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ для фиксированного $k > 0$, и её предел при $k \to +0$ как функция Грина оператора Лапласа.

9. Метод регуляризации и вычисление функции Грина оператора Гельмгольца $\Delta + k^2$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ для фиксированного $k > 0$, и её предел при $k \to +0$ как функция Грина оператора Лапласа.

10. Функция Грина оператора Лапласа в $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^3\right)$ и вычисление в $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^3\right)$ обобщённого решения уравнения Пуассона с абсолютно интегрируемым на $\mathbb{R}^3$ источником, формула Пуассона.

11. Вторая гладкость на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^3$ обобщённого решения уравнения Пуассона в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ с абсолютно интегрируемым на $\mathbb{R}^3$ и непрерывно–дифференцируемым на G источником.

12. Вычисление методом регуляризации функции Грина оператора Даламбера в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ и обобщённое решение волнового уравнения с источником медленного роста, запаздывающий потенциал.

13. Формула Кирхгоффа решения обобщённой задачи Коши для однородного волнового уравнения в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ при начальных условиях медленного роста. Достаточные условия, при которых обобщённое решение становится классическим.

14. Сопряжённый оператор линейного оператора в гильбертовом пространстве. Область определения сопряжённого оператора. Теорема Фредгольма о связи множества значений линейного оператора и ядра его сопряжённого. Теорема о связи графиков линейного оператора и его сопряжённого.

15. Критерий замыкаемости плотно определённого линейного оператора в гильбертовом пространстве. Пример незамыкаемого плотно определённого оператора. Замыкаемость оператора Лапласа $\Delta\colon C^2(\overline{G}) \to \mathbb{L}_2(G)$ для ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^m$ с кусочно–гладкой границей.

16. Неравенство Фридрихса для функции $f \in C^1(\overline{G})$ и выпуклой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^m$ с кусочно–гладкой границей. Задача Дирихле в круге $K \subset \subset \mathbb{R}^2$ для замыкания оператора Лапласа $\Delta\colon C^2(\overline{K}) \to \mathbb{L}_2(K)$, существование и единственность её решения.

17. Собственные числа и собственные функции оператора Лапласа—Бельтрами на сфере $S \subset \mathbb{R}^3$, сферические функции. Ортогональный базис в пространстве $\mathbb{L}_2(S)$ из сферических функций.

18. Неравенство Фридрихса для функции $f \in C^1(\overline{G})$ и выпуклой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^m$ с кусочно–гладкой границей. Задача Дирихле в шаре $B \subset \mathbb{R}^3$ для замыкания оператора Лапласа $\Delta\colon C^2(\overline{B}) \to \mathbb{L}_2(B)$, существование и единственность её решения.

19. Самосопряжённый линейный оператор в гильбертовом пространстве, его плотная определённость, замкнутость и симметричность. Пример несамосопряжённого замкнутого плотно определённого симметричного оператора. Вещественность спектра самосопряжённого оператора.

20. Спектральное разложение и самосопряжённость замыкания симметричного линейного оператора, обладающего ортогональным базисом в гильбертовом пространстве из своих собственных функций. Функция от замыкания такого оператора.

21. Начально—краевая задача для однородного уравнения Шрёдингера с самосопряжённым линейным оператором в гильбертовом пространстве. Метод Фурье решения этой задачи и критерий её разрешимости. Оператор эволюции.

22. Собственные числа и собственные функции оператора Лапласа в круговом секторе при однородном граничном условии. Функции Бесселя. Свойство ортогональности и свойства нулей функций Бесселя.

23. Ортогональный базис в пространстве $\mathbb{L}_2(G)$ из собственных функций оператора Лапласа в круговом секторе $G \subset \mathbb{R}^2$ при однородном граничном условии.

24. Компактные самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве. Теорема Гильберта—Шмидта. Резольвента компактного самосопряжённого оператора.

25. Симметричный оператор Штурма–Лиувилля и критерий его обратимости. Замыкание оператора, обратного к оператору Штурма–Лиувилля, как самосопряжённый компактный оператор. Теорема Стеклова.