

# ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

## Функциональный анализ и его приложения, 2018-19 уч.г.

(Поток Р. В. Константинова, ФУПМ, ФОПФ)

1. Частично упорядоченные множества. Теорема Хаусдорфа о максимальнойности и лемма Цорна.
2. Топологические пространства, база и предбаза топологии. Критерий базы и критерий предбазы топологии.
3. Топологическое и секвенциальное определения замкнутости и замыкания множества топологического пространства, связь между ними. Аксиома счётности.
4. Топологически и секвенциально непрерывные отображения топологических пространств, связь между ними. Критерий топологической непрерывности отображения.
5. Метрические пространства, метрическая топология и её база. Сепарабельные метрические пространства. Критерий несепарабельности метрического пространства.
6. Компактные множества топологического пространства. Теорема Александра о предбазе и теорема Тихонова о компактности декартова произведения компактных топологических пространств.
7. Секвенциально и счётно компактные множества топологического пространства, связь между ними. Примеры компактного топологического пространства, не являющегося счётно компактным, и наоборот.
8. Вполне ограниченные множества метрического пространства. Критерий Фреше топологической компактности множества метрического пространства.
9. Теорема Арцела—Асколи о вполне ограниченном множестве в пространстве  $C(K)$  для компактного метрического пространства  $(K, \rho)$ .
10. Три определения эквивалентности норм в линейном пространстве, равносильность этих определений. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном линейном пространстве.
11. Лемма Рисса о почти перпендикуляре и теорема Рисса об отсутствии вполне ограниченности сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве.

12. Теорема Хана—Банаха о продолжении вещественно—линейного функционала, ограниченного полуаддитивной положительно—однородной функцией, и её следствия.
13. Слабая\* топология в сопряжённом пространстве. Теорема Банаха—Алаоглу о слабой\* компактности шара в сопряжённом пространстве.
14. Теорема о метризуемости слабой\* топологии на шарах в сопряжённом пространстве. Пример отсутствия слабой\* секвенциальной компактности шара в сопряжённом пространстве.
15. Слабая топология в линейном нормированном пространстве. Теорема Мазура о слабой замкнутости выпуклого сильно замкнутого множества линейного нормированного пространства.
16. Рефлексивные линейные нормированные пространства. Теоремы о слабой топологической и секвенциальной компактности шара рефлексивного линейного нормированного пространства.
17. Теорема Рисса—Фреше о сопряжённом гильбертовом пространстве. Рефлексивность гильбертова пространства.
18. Линейное нормированное пространство  $\mathcal{L}(X, Y)$  для линейных нормированных пространств  $X$  и  $Y$ . Теорема о полноте пространства  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Неполнота пространства  $\mathcal{L}(X, Y)$  при неполном  $Y$  и нетривиальном  $X$ .
19. Теорема Банаха—Штейнгауза. Теорема о полноте пространства  $\mathcal{L}(X, Y)$  относительно поточечной сходимости. Ограниченность слабо и слабо\* сходящихся последовательностей в линейном нормированном пространстве и его сопряжённом.
20. Теоремы Банаха об открытом отображении и об обратном операторе. Пример линейного непрерывного оператора, имеющего неограниченный обратный.
21. Теорема Банаха о замкнутом графике. Теорема Хеллингера—Теплица о непрерывности симметричного линейного оператора в гильбертовом пространстве.
22. Сопряжённый оператор  $A^*$  для линейного оператора  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Теорема о равенстве норм операторов  $A$  и  $A^*$ . Эрмитово—сопряжённый оператор для линейного непрерывного оператора в гильбертовом пространстве.
23. Аннуляторы подпространств в линейном нормированном пространстве и его сопряжённом. Связь множеств  ${}^\perp \text{Ker} A^*$  и  $[\text{Im} A]$ ,  $(\text{Ker} A)^\perp$  и  $[\text{Im} A^*]$  для оператора  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ .
24. Теорема об эквивалентности замкнутости множества значений оператора  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  и множества значений его сопряжённого. Связь сюръективности оператора  $A$  и ограниченности снизу его сопряжённого.

25. Компактные линейные операторы. Теорема о связи компактности линейного ограниченного оператора и его сопряжённого.
26. Банаховы алгебры. Пространство  $\mathcal{L}(X)$  как банахова алгебра. Группа обратимых элементов банаховой алгебры и её открытость.
27. Спектр элемента банаховой алгебры, его непустота и компактность. Теорема Гельфанда—Мазура.
28. Теорема о спектральном радиусе элемента банаховой алгебры. Непрерывная зависимость спектра от элемента банаховой алгебры.
29. Преобразование Гельфанда коммутативной банаховой алгебры. Коммутативные  $B^*$ -алгебры и теорема Гельфанда—Наймарка.
30. Банахова алгебра  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  гильбертова пространства  $\mathcal{H}$  как  $B^*$ -алгебра. Спектральная теорема для нормального оператора  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .