

# ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу «Алгебра и геометрия»

1 курс, 2 семестр

(Поток И. И. Богданова)

1. Кольцо многочленов над полем. Значение многочлена. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида, линейное выражение НОД. Основная теорема арифметики для многочленов. Корни многочленов. Теорема Безу. Формальная производная. Кратные корни.
2. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен и его инвариантность. Определитель и след преобразования.
3. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих попарно различным собственным значениям. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Условия диагонализуемости преобразования.
4. Приведение матрицы преобразования к треугольному виду. Теорема Гамильтона–Кэли.
5. Аннулирующие многочлены. Жорданова нормальная форма, её существование и единственность. Минимальный многочлен линейного преобразования, его связь с жордановой нормальной формой.
6. Линейные рекурренты. Общий вид линейной рекурренты над произвольным полем (в случае, когда характеристический многочлен раскладывается на линейные множители).
7. Полилинейные формы. Билинейные формы. Координатная запись билинейной формы. Матрица билинейной формы и её изменение при замене базиса.
8. Симметричные и кососимметричные билинейные формы. Ядро формы, ортогональное дополнение подпространства (относительно формы), их свойства.
9. Квадратичные формы, их связь с симметричными билинейными формами. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Положительно определённые квадратичные формы. Индексы инерции квадратичной формы. Закон инерции. Метод Якоби приведения квадратичной формы к диагональному виду. Критерий Сильвестра.
10. Приведение кососимметричной билинейной формы к каноническому виду.
11. Полуторалинейные формы в комплексном пространстве. Эрмитовы квадратичные формы. Приведение к каноническому виду. Закон инерции для эрмитовых квадратичных форм.
12. Евклидово и эрмитово пространства. Выражение скалярного произведения в координатах. Свойства матрицы Грама. Неравенство треугольника.
13. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. Существование ортонормированных базисов. Изоморфизм евклидовых и эрмитовых пространств. Канонический изоморфизм евклидова пространства и сопряжённого к нему.
14. Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональное проектирование. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Объём параллелепипеда.
15. Связь билинейных форм и линейных преобразований в евклидовом и эрмитовом пространстве. Преобразование, сопряжённое данному. Его существование и единственность, его свойства. Теорема Фредгольма.
16. Самосопряжённые линейные преобразования. Свойства самосопряжённых преобразований. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряжённого линейного преобразования.
17. Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства. Инвариантные подпространства малой размерности для преобразования вещественного пространства. Канонический вид унитарного и ортогонального преобразований. Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве.
18. Приведение квадратичной формы в евклидовом пространстве к главным осям. Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду.