

# ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

## Функциональный анализ и его приложения, 2021-22 уч.г.

(Поток П. А. Останина, ЛФИ)

1. Аксиома выбора. Лемма Цорна (без доказательства). Существование базиса Гамеля. Существование алгебраического дополнения подпространства линейного пространства. Существование всюду определенного разрывного линейного биективного оператора в банаховом пространстве.
2. Топологические пространства, база и предбаза топологии. Критерий базы и критерий предбазы топологии.
3. Топологическое и секвенциальное определения замкнутости и замыкания множества топологического пространства, связь между ними. Аксиома счетности.
4. Топологически и секвенциально непрерывные отображения топологических пространств, связь между ними. Критерий топологической непрерывности отображения.
5. Метрические пространства и метрическая топология. Сепарабельные метрические пространства. Критерий несепарабельности метрического пространства.
6. Полнота метрического пространства, критерий полноты (принцип вложенных шаров). Теорема Бэра о категории.
7. Пополнение метрического пространства. Теорема Хаусдорфа о существовании пополнения. Изометричность двух пополнений неполного метрического пространства.
8. Топологический компакт. Секвенциальный компакт. Пример секвенциального, но не топологического компакта. Пример топологического, но не секвенциального компакта. Теорема Тихонова (без доказательства).
9. Вполне ограниченные подмножества метрического пространства. Критерий Фреше компактности подмножества метрического пространства.
10. Линейное нормированное пространство  $C(K)$  для компактного метрического пространства  $(K, \rho)$ , его полнота. Критерий Арцела—Асколи вполне ограниченности подмножества пространства  $C(K)$ .
11. Критерий Рисса—Колмогорова вполне ограниченности подмножества пространства  $L_p(\mathbb{R}^m)$  для  $1 \leq p < +\infty$ .

12. Направленные множества. Направленности в топологическом пространстве. Критерий топологической точки прикосновения. Критерий хаусдорфовости. Критерий непрерывности отображения между топологическими пространствами.
13. Поднаправленность. Точка накопления направленности. Критерий компактности топологического пространства в терминах направленностей.
14. Эквивалентные нормы в линейном пространстве. Четыре равносильных определения эквивалентности норм.
15. Эквивалентность норм в конечномерном линейном пространстве. Пример неэквивалентных норм в бесконечномерном пространстве. Существование неэквивалентных норм во всяком бесконечномерном пространстве.
16. Лемма Рисса о почти перпендикуляре. Теорема Рисса об отсутствии вполне ограниченности сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве.
17. Факторпространство банахова пространства по замкнутому линейному подпространству. Норма факторпространства. Полнота факторпространства.
18. Гильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Теоремы Рисса о проекции и об ортогональном разложении в гильбертовом пространстве.
19. Теорема Рисса-Фреше об общем виде линейного непрерывного функционала над гильбертовым пространством. Теорема Радона-Никодима для двух конечных неотрицательных мер на одной  $\sigma$ -алгебре.
20. Линейное нормированное пространство  $\mathcal{L}(X, Y)$  ограниченных операторов, действующих в нормированных пространствах  $X$  и  $Y$ . Теорема о полноте пространства  $\mathcal{L}(X, Y)$ .
21. Теорема Банаха—Штейнгауза и полнота пространства  $\mathcal{L}(X, Y)$  относительно поточечной сходимости.
22. Теорема Банаха об открытом отображении.
23. Теоремы Банаха об обратном операторе и замкнутом графике. Теорема Хеллингера—Теплица о непрерывности симметричного на гильбертовом пространстве линейного оператора.
24. Связь непрерывной обратимости оператора и ограниченности снизу. Замкнутость образа непрерывно обратимого оператора.
25. Компактные операторы в пространстве  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Замкнутость подпространства компактных операторов  $\mathcal{K}(X, Y)$  в пространстве  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Теорема о прибли-

жении компактного оператора в пространстве  $\mathcal{L}(X, H)$  конечномерным оператором для гильбертова пространства  $H$ .

26. Топологические векторные пространства. Существование симметричной окрестности нуля такой, что ее сумма по Минковскому с самой собой лежит в заданной окрестности нуля. Существование уравновешенной подокрестности данной окрестности нуля. «Простейшие» теоремы об отделимости в ТВП.

27. Локальная выпуклость. Полинормированность локально выпуклого пространства (без доказательства). Критерий непрерывности полунормы в локально выпуклом пространстве. Критерий непрерывности линейного оператора между двумя локально выпуклыми пространствами.

28. Теорема Хана—Банаха.

29. Следствия из теоремы Хана-Банаха в нормированном пространстве. Каноническое вложение, его свойства. Рефлексивность гильбертова пространства.

30. Слабая топология в бесконечномерном нормированном пространстве. Теорема о метризуемости слабой топологии на шаре.

31. Слабая\* топология в сопряжённом пространстве к линейному нормированному пространству. Теорема Шмульяна о представлении слабо\* непрерывного линейного функционала.

32. Теорема Банаха-Алаоглу. Теорема Банаха-Тихонова о слабой компактности замкнутого шара в рефлексивном пространстве.

33. Теорема о строгой отделимости в локально выпуклом топологическом векторном пространстве и её следствия.

34. Теорема о сильной отделимости в локально выпуклом топологическом векторном пространстве и её следствия. Аннуляторы и вторые аннуляторы.

35. Геометрия слабой окрестности. Слабое замыкание единичной сферы бесконечномерного пространства. Теорема Мазура о слабом замыкании выпуклого множества нормированного пространства. Существование сильно сходящейся последовательности выпуклых комбинаций элементов слабо сходящейся последовательности.

36. Оператор, сопряжённый к оператору  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  для банаховых  $X, Y$ . Оператор, сопряжённый к оператору  $A \in \mathcal{L}(H)$  для гильбертова  $H$ . Теорема Фредгольма и ее следствие. Равносильность непрерывной обратимости оператора и его сопряженного.

37. Резольвентное множество и спектр оператора  $A \in \mathcal{L}(X)$  для банахова пространства  $X$ . Открытость резольвентного множества, непустота и компактность

спектра. Равенство спектров операторов  $A$  и  $A^*$  для оператора  $A \in \mathcal{L}(X)$ , где  $X$  банахово пространство.

38. Теорема о конечномерности ядра  $\text{Ker } A_\lambda$  и замкнутости множества значений  $\text{Im } A_\lambda$  для компактного оператора  $A \in \mathcal{L}(X)$  и ненулевого числа  $\lambda$  в банаховом пространстве  $X$ .

39. Теорема об эквивалентности компактности оператора  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  и компактности его сопряжённого оператора  $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ . Критерий компактности оператора  $A \in \mathcal{L}(X)$  для рефлексивного и сепарабельного пространства  $X$  в терминах сильной сходимости образа слабо сходящейся последовательности.

40. Свойства оператора  $I - L$ , где  $L \in \mathcal{L}(X)$  — компактный оператор в банаховом  $X$ . Стабильное ядро и стабильный образ, их существование и разложение  $X$  в их прямую сумму. Свойства сужений оператора  $I - L$  на стабильное ядро и стабильный образ. Альтернатива Фредгольма.

41. Теорема о спектре компактного оператора  $A \in \mathcal{L}(X)$  в банаховом пространстве  $X$ .

42. Определение банаховой алгебры. Спектр и резольвента элемента банаховой алгебры. Открытость множества обратимых элементов. Непустота спектра элемента банаховой алгебры. Теорема Гельфанда-Мазура.

43. Сильно аналитические и слабо аналитические банаховозначные функции, определенные в области в  $\mathbb{C}$ .

44. Аналитичность резольвенты элемента банаховой алгебры в окрестности регулярной точки этого элемента. Формула Коши-Адамара для спектрального радиуса элемента банаховой алгебры.

45. Комплексные гомоморфизмы (характеры) и максимальные идеалы коммутативной банаховой алгебры. Обратимость ненулевых элементов в факторалгебре по максимальному идеалу для коммутативной банаховой алгебры.

46. Пространство Гельфанда коммутативной банаховой алгебры, его компактность. Преобразование Гельфанда. Множество значений преобразования Гельфанда элемента коммутативной банаховой алгебры.

47. Инволюция и  $B^*$ -алгебры, теорема Гельфанда—Наймарка. Теорема Стоуна-Вейерштрасса в вещественном и комплексном случаях (без доказательства).

48. Билинейные и квадратичные формы в гильбертовом пространстве, поляризованная формула. Теорема о существовании и единственности оператора из  $\mathcal{L}(H)$ , порождающего ограниченную билинейную форму. Самосопряжённость оператора в терминах свойств его билинейной формы.

49. Коммутативная  $B^*$ -подалгебра  $\text{Alg}(I, T, T^*)$  в  $\mathcal{L}(H)$ , порождённая нормальным оператором  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Теорема об её пространстве Гельфанда (без доказательства). Определение непрерывной функции от нормального оператора  $T$ . Совпадение спектров нормального оператора  $T$  в алгебре  $\mathcal{L}(H)$  и в порождённой им подалгебре  $\text{Alg}(I, T, T^*)$ .
50. Пространство  $\mathcal{L}(H)$  для гильбертова пространства  $H$  как  $B^*$ -алгебра. Самосопряжённость и унитарность нормальных операторов в  $\mathcal{L}(H)$  в терминах свойств их спектров. Свойства нормальных операторов, пустота их остаточного спектра. Ортогональные проекторы в гильбертовом пространстве.
51. Разложения единицы. Спектральная теорема для ограниченных нормальных операторов в гильбертовом пространстве.
52. Спектральное разложение компактного нормального оператора. Полярное разложение произвольного оператора из  $\mathcal{L}(H)$ , где  $H$  — гильбертово пространство. Сингулярное разложение (ряд Шмидта) произвольного компактного оператора из  $\mathcal{L}(H)$ .