

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

Функциональный анализ и его приложения, 2020-21 уч.г.

(Поток П. А. Останина, ЛФИ (ФОПФ))

1. Аксиома выбора. Лемма о неподвижном множестве. Частично упорядоченные множества. Теорема Хаусдорфа о максимальности и лемма Цорна.
2. Вполне упорядоченные множества. Теорема Цермело и контрпример Серпинского к теореме Фубини.
3. Топологические пространства, база и предбаза топологии. Критерий базы и критерий предбазы топологии.
4. Топологическое и секвенциальное определения замкнутости и замыкания множества топологического пространства, связь между ними. Аксиома счётности.
5. Топологически и секвенциально непрерывные отображения топологических пространств, связь между ними. Критерий топологической непрерывности отображения.
6. Счётно компактные и секвенциально компактные подмножества топологического пространства, связь между ними.
7. Компактные подмножества топологического пространства. Теорема Александра о предбазе.
8. Хаусдорфово топологическое пространство. Топологическая замкнутость компактного подмножества хаусдорфова топологического пространства.
9. Декартово произведение топологических пространств, топология Тихонова. Теорема Тихонова о компактности декартова произведения компактных топологических пространств.
10. Метрические пространства и метрическая топология. Полнота метрического пространства, критерий полноты (принцип вложенных шаров). Теорема Бэра о категории.
11. Пополнение метрического пространства. Теорема Хаусдорфа о существовании пополнения. Изометричность двух пополнений неполного метрического пространства.
12. Сепарабельные метрические пространства. Критерий несепарабельности метрического пространства.

13. Вполне ограниченные подмножества метрического пространства. Критерий Фреше компактности подмножества метрического пространства.
14. Топологические векторные и линейные нормированные пространства. Критерий Колмогорова нормируемости векторной топологии.
15. Эквивалентные нормы в линейном пространстве. Эквивалентность норм в конечномерном линейном пространстве.
16. Евклидово пространство и евклидова норма. Неравенство Коши—Буняковского—Шварца. Равенство параллелограмма и критерий евклидовости нормы в нормированном пространстве.
17. Гильбертово пространство. Теоремы Рисса о проекции и об ортогональном разложении в гильбертовом пространстве.
18. Лемма Рисса о почти перпендикуляре. Теорема Рисса об отсутствии вполне ограниченности сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве.
19. Линейное нормированное пространство $C(K)$ для компактного метрического пространства (K, ρ) , его полнота. Критерий Арцела—Асколи вполне ограниченности подмножества пространства $C(K)$.
20. Линейное нормированное пространство $\mathbb{L}_p(E)$ для $1 \leq p < +\infty$ и измеримого по Лебегу множества $E \subset \mathbb{R}^m$, его полнота.
21. Критерий Рисса—Колмогорова вполне ограниченности подмножества пространства $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^m)$ для $1 \leq p < +\infty$.
22. Линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ ограниченных операторов, действующих в нормированных пространствах X и Y . Теорема о полноте пространства $\mathcal{L}(X, Y)$.
23. Теорема Банаха—Штейнгауза и полнота пространства $\mathcal{L}(X, Y)$ относительно поточечной сходимости.
24. Критерий непрерывной обратимости линейного оператора, действующего в нормированных пространствах. Теорема Банаха об открытом отображении.
25. Теоремы Банаха об обратном операторе и замкнутом графике. Теорема Хеллингера—Теплица о непрерывности симметричного на гильбертовом пространстве линейного оператора.
26. Компактные операторы в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$. Замкнутость подпространства компактных операторов $\mathcal{K}(X, Y)$ в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$.

27. Теорема о приближении компактного оператора в пространстве $\mathcal{L}(X, H)$ конечномерным оператором для гильбертова пространства H .
28. Теорема Хана—Банаха и её следствия в линейном нормированном пространстве.
29. Теорема об отделимости в локально выпуклом топологическом векторном пространстве и её следствия.
30. Слабая* топология в сопряжённом пространстве к линейному нормированному пространству. Теорема Шмульяна о представлении слабо* непрерывного линейного функционала.
31. Слабая топология в бесконечномерном нормированном пространстве. Теорема о метризуемости слабой топологии на шаре.
32. Теорема Мазура о слабом замыкании выпуклого множества нормированного пространства. Существовании сильно сходящейся последовательности выпуклых комбинаций элементов слабо сходящейся последовательности.
33. Теорема Банаха—Алаоглу для топологического векторного пространства. Рефлексивные банаховы пространства. Теорема Банаха-Тихонова о слабой компактности замкнутого шара в рефлексивном пространстве.
34. Теорема Рисса—Фреше о представлении сопряжённого гильбертова пространства. Рефлексивность гильбертова пространства.
35. Оператор, сопряжённый к оператору $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ для банаховых X, Y . Оператор, сопряжённый к оператору $A \in \mathcal{L}(H)$ для гильбертова H . Равенство норм оператора и его сопряженного. Левый и правый аннуляторы подпространств банахова пространства и его сопряженного. Теорема Фредгольма и её следствие.
36. Резольвентное множество и спектр оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ для банахова пространства X . Открытость резольвентного множества, непустота и компактность спектра. Равенство спектров операторов A и A^* для оператора $A \in \mathcal{L}(X)$, где X банахово пространство.
37. Теорема о конечномерности ядра $\text{Ker } A_\lambda$ и замкнутости множества значений $\text{Im } A_\lambda$ для компактного оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ и нетривиального числа λ в банаховом пространстве X .
38. Теорема об эквивалентности компактности оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и компактности его сопряжённого оператора $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$. Критерий компактности оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ для рефлексивного и сепарабельного пространства X в терминах сильной сходимости образа произвольной слабо сходящейся последовательности.

39. Свойства оператора $I - L$, где $L \in \mathcal{L}(X)$ — компактный оператор в банаховом X . Стабильное ядро и стабильный образ, их существование и разложение X в их прямую сумму. Свойства сужений оператора $I - L$ на стабильное ядро и стабильный образ. Альтернатива Фредгольма.
40. Теорема о спектре компактного оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ в банаховом пространстве X .
41. Определение банаховой алгебры. Спектр и резольвента элемента банаховой алгебры. Открытость множества обратимых элементов. Непустота спектра элемента банаховой алгебры. Теорема Гельфанда-Мазура.
42. Аналитичность резольвенты элемента банаховой алгебры в окрестности регулярной точки этого элемента. Формула Коши-Адамара для спектрального радиуса элемента банаховой алгебры.
43. Комплексные гомоморфизмы (характеры) и максимальные идеалы коммутативной банаховой алгебры. Факторпространство банахова пространства по его замкнутому подпространству, его полнота. Обратимость ненулевых элементов в факторалгебре по максимальному идеалу для коммутативной банаховой алгебры.
44. Пространство Гельфанда коммутативной банаховой алгебры, его компактность. Преобразование Гельфанда. Множество значений преобразования Гельфанда элемента коммутативной банаховой алгебры.
45. Инволюция и B^* -алгебры, теорема Гельфанда—Наймарка. Теорема Стоуна-Вейерштрасса в вещественном и комплексном случаях (без доказательства).
46. Билинейные и квадратичные формы в гильбертовом пространстве, поляризационная формула. Теорема о существовании и единственности оператора из $\mathcal{L}(H)$, порождающего ограниченную билинейную форму. Самосопряжённость оператора в терминах свойств его билинейной формы.
47. Коммутативная B^* -подалгебра $\text{Alg}(I, T, T^*)$ в $\mathcal{L}(H)$, порождённая нормальным оператором $T \in \mathcal{L}(H)$. Теорема об её пространстве Гельфанда (без доказательства). Определение непрерывной функции от нормального оператора T . Совпадение спектров нормального оператора T в алгебре $\mathcal{L}(H)$ и в порождённой им подалгебре $\text{Alg}(I, T, T^*)$.
48. Пространство $\mathcal{L}(H)$ для гильбертова пространства H как B^* -алгебра. Самосопряжённость и унитарность нормальных операторов в $\mathcal{L}(H)$ в терминах свойств их спектров. Свойства нормальных операторов, пустота их остаточного спектра. Ортогональные проекторы в гильбертовом пространстве.

49. Разложения единицы. Спектральная теорема для ограниченных нормальных операторов в гильбертовом пространстве.

50. Спектральное разложение компактного нормального оператора. Полярное разложение произвольного оператора из $\mathcal{L}(H)$, где H — гильбертово пространство. Сингулярное разложение (ряд Шмидта) произвольного компактного оператора из $\mathcal{L}(H)$.