

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

Функциональный анализ и его приложения, 2020-21 уч.г.

(Поток Р. В. Константинова, ФУПМ)

1. Аксиома выбора. Лемма о неподвижном множестве. Частично упорядоченные множества. Теорема Хаусдорфа о максимальнойности и лемма Цорна.
2. Вполне упорядоченные множества. Теорема Цермело и контрпример Серпинского к теореме Фубини.
3. Топологические пространства, база и предбаза топологии. Критерий базы и критерий предбазы топологии.
4. Топологическое и секвенциальное определения замкнутости и замыкания множества топологического пространства, связь между ними. Аксиома счётности.
5. Топологически и секвенциально непрерывные отображения топологических пространств, связь между ними. Критерий топологической непрерывности отображения.
6. Счётно компактные и секвенциально компактные подмножества топологического пространства, связь между ними.
7. Компактные подмножества топологического пространства. Теорема Александра о предбазе.
8. Хаусдорфово топологическое пространство. Топологическая замкнутость компактного подмножества хаусдорфова топологического пространства.
9. Декартово произведение топологических пространств, топология Тихонова. Теорема Тихонова о компактности декартова произведения компактных топологических пространств.
10. Метрические пространства и метрическая топология. Полнота метрического пространства, критерий полноты (принцип вложенных шаров). Теорема Бэра о категории.
11. Пополнение метрического пространства. Теорема Хаусдорфа о существовании пополнения. Изометричность двух пополнений неполного метрического пространства.
12. Сепарабельные метрические пространства. Критерий несепарабельности метрического пространства.

13. Вполне ограниченные подмножества метрического пространства. Критерий Фреше компактности подмножества метрического пространства.
14. Топологические векторные и линейные нормированные пространства. Критерий Колмогорова нормируемости векторной топологии.
15. Эквивалентные нормы в линейном пространстве. Эквивалентность норм в конечномерном линейном пространстве.
16. Евклидово пространство и евклидова норма. Неравенство Коши—Буняковского—Шварца. Равенство параллелограммов и критерий евклидовости нормы в нормированном пространстве.
17. Гильбертово пространство. Теоремы Рисса о проекции и об ортогональном разложении в гильбертовом пространстве.
18. Лемма Рисса о почти перпендикуляре. Теорема Рисса об отсутствии вполне ограниченности сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве.
19. Линейное нормированное пространство $C(K)$ для компактного метрического пространства (K, ρ) , его полнота. Критерий Арцела—Асколи вполне ограниченности подмножества пространства $C(K)$.
20. Линейное нормированное пространство $\mathbb{L}_p(E)$ для $1 \leq p < +\infty$ и измеримого по Лебегу множества $E \subset \mathbb{R}^m$, его полнота.
21. Критерий Рисса—Колмогорова вполне ограниченности подмножества пространства $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^m)$ для $1 \leq p < +\infty$.
22. Линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ ограниченных операторов, действующих в нормированных пространствах X и Y . Теорема о полноте пространства $\mathcal{L}(X, Y)$.
23. Теорема Банаха—Штейнгауза и полнота пространства $\mathcal{L}(X, Y)$ относительно поточечной сходимости.
24. Критерий непрерывной обратимости линейного оператора, действующего в нормированных пространствах. Теорема Банаха об открытом отображении.
25. Теоремы Банаха об обратном операторе и замкнутом графике. Теорема Хеллингера—Теплица о непрерывности симметричного на гильбертовом пространстве линейного оператора.
26. Компактные операторы в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$. Замкнутость подпространства компактных операторов $\mathcal{K}(X, Y)$ в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$.

27. Теорема о приближении компактного оператора в пространстве $\mathcal{L}(X, H)$ конечномерным оператором для гильбертова пространства H .
28. Теорема Хана—Банаха и её следствия в линейном нормированном пространстве.
29. Теорема об отделимости в локально выпуклом топологическом векторном пространстве и её следствия.
30. Слабая топология в бесконечномерном нормированном пространстве. Теорема о метризуемости слабой топологии на шаре и её неметризуемость на всём пространстве.
31. Слабая* топология в сопряжённом пространстве к линейному нормированному пространству. Теорема о представлении слабо* непрерывного линейного функционала.
32. Теорема о метризуемости слабой* топологии на шаре в сопряжённом пространстве к линейному нормированному пространству. Критерий метризуемости слабой* топологии на всём сопряжённом пространстве.
33. Теорема Мазура о слабом замыкании выпуклого множества нормированного пространства. Существовании сильно сходящейся последовательности выпуклых комбинаций элементов слабо сходящейся последовательности.
34. Теорема Банаха—Алаоглу для топологического векторного пространства. Рефлексивные банаховы пространства. Теорема о слабой компактности замкнутого шара в рефлексивном пространстве.
35. Теорема Эберлейна—Шмульяна о слабой секвенциальной компактности слабого компакта в нормированном пространстве.
36. Теорема Рисса—Фреше о представлении сопряжённого гильбертова пространства. Рефлексивность гильбертова пространства.
37. Оператор, сопряжённый к оператору $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Равенства ${}^\perp(\text{Ker } A^*)$ сильному замыканию $\text{Im } A$ и $(\text{Ker } A)^\perp$ слабому* замыканию $\text{Im } A^*$. Теорема о равенствах ${}^\perp(\text{Ker } A^*) = \text{Im } A$ и $(\text{Ker } A)^\perp = \text{Im } A^*$ для банаховых пространств X и Y при условии замкнутости $\text{Im } A$.
38. Теорема о конечномерности ядра $\text{Ker } A_\lambda$ и замкнутости множества значений $\text{Im } A_\lambda$ для компактного оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ и нетривиального числа λ в банаховом пространстве X . Критерий разрешимости уравнения $A_\lambda x = y$ для $y \in X$.
39. Теорема об эквивалентности компактности оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и компактности его сопряжённого оператора $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

40. Теорема об эквивалентности непрерывной обратимости оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и непрерывной обратимости его сопряжённого оператора $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ для банахова пространства X и нормированного пространства Y .
41. Резольвентное множество и спектр оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ для банахова пространства X . Открытость резольвентного множества, непустота и компактность спектра. Равенство спектров операторов A и A^* .
42. Теорема о спектральном радиусе оператора $A \in \mathcal{L}(X)$. Критерий равенства спектрального радиуса норме оператора.
43. Теорема о равенстве размерностей ядер $\text{Ker } A_\lambda$ и $\text{Ker } A_\lambda^*$ для компактного оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ и нетривиального числа λ в банаховом пространстве X . Альтернатива Фредгольма.
44. Теорема о спектре компактного оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ в банаховом пространстве X .
45. Пространство $\mathcal{L}(X)$ для банахова пространства X как банахова алгебра. Комплексные гомоморфизмы и спектр элемента банаховой алгебры. Теорема Гельфанда о спектре элемента коммутативной банаховой алгебры.
46. Инволюция и B^* -алгебры, теорема Гельфанда—Наймарка. Эрмитовы и нормальные элементы B^* -алгебры и их спектральные свойства.
47. Пространство $\mathcal{L}(H)$ для гильбертова пространства H как B^* -алгебра. Самосопряжённые и унитарные операторы в $\mathcal{L}(H)$, их спектральные свойства. Ортогональные проекторы в гильбертовом пространстве. Разложения единицы.
48. Спектральная теорема для ограниченных нормальных операторов в гильбертовом пространстве. Собственные значения ограниченного нормального оператора.