ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

Функциональный анализ и его приложения, 2019-20 уч.г.

(Поток Р. В. Константинова, ФУПМ, ФОПФ)

1. Топологические пространства, база и предбаза топологии. Критерий базы и критерий предбазы топологии.

2. Топологическое и секвенциальное определения замкнутости и замыкания множества топологического пространства, связь между ними. Аксиома счётности.

3. Топологически и секвенциально непрерывные отображения топологических пространств, связь между ними. Критерий топологической непрерывности отображения.

4. Метрические пространства, метрическая топология и её база. Сепарабельные метрические пространства. Критерий несепарабельности метрического пространства.

5. Компактные множества топологического пространства. Теорема Александера о предбазе и теорема Тихонова о компактности декартова произведения компактных топологических пространств.

6. Секвенциально и счётно компактные множества топологического пространства, связь между ними. Примеры компактного топологического пространства, не являющегося секвенциально компактным, и наоборот.

7. Вполне ограниченные множества метрического пространства. Критерий Фреше топологической компактности множества метрического пространства.

8. Теорема Арцела—Асколи о вполне ограниченном множестве в пространстве $C(K)$ для компактного метрического пространства (K, ρ).

9. Теорема Рисса—Колмогорова о вполне ограниченном множестве в пространстве $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)$ при $1 \leq p < +\infty$.

10. Три определения эквивалентности норм в линейном пространстве, равносильность этих определений. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном линейном пространстве.

11. Лемма Рисса о почти перпендикуляре и теорема Рисса об отсутствии вполне ограниченности сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве.

12. Теорема Хана—Банаха о продолжении вещественно–линейного функционала, ограниченного полуаддитивной положительно–однородной функцией, и её следствия.

13. Слабая* топология в сопряжённом пространстве. Теорема Банаха—Алаоглу о слабой* компактности шара в сопряжённом пространстве.

14. Теорема о метризуемости слабой* топологии на шарах в сопряжённом пространстве. Пример отсутствия слабой* секвенциальной компактности шара в сопряжённом пространстве.

15. Слабая топология в линейном нормированном пространстве. Теорема Мазура о слабой замкнутости выпуклого сильно замкнутого множества линейного нормированного пространства.

16. Рефлексивные линейные нормированные пространства. Теоремы о слабой топологической и секвенциальной компактности шара рефлексивного линейного нормированного пространства.

17. Теорема Рисса—Фреше о сопряжённом гильбертовом пространстве. Рефлексивность гильбертово пространства.

18. Линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ для линейных нормированных пространств X и Y. Теорема о полноте пространства $\mathcal{L}(X, Y)$. Неполнота пространства $\mathcal{L}(X, Y)$ при неполном Y и нетривиальном X.

19. Теорема Банаха—Штейнгауза. Теорема о полноте пространства $\mathcal{L}(X, Y)$ относительно поточечной сходимости. Ограниченность слабо и слабо* сходящихся последовательностей в линейном нормированном пространстве и его сопряжённом.

20. Сопряжённый оператор A^* для линейного оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Теорема о равенстве норм операторов A и A^*. Эрмитово–сопряжённый оператор для линейного непрерывного оператора в гильбертовом пространстве.

21. Аннуляторы подпространств в линейном нормированном пространстве и его сопряжённом. Связь множеств ${}^{\perp}\mathrm{Ker}A^*$ и $[\mathrm{Im}A]$, $(\mathrm{Ker}A)^{\perp}$ и $[\mathrm{Im}A^*]$ для оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

22. Компактные линейные операторы. Теорема о связи компактности линейного ограниченного оператора и его сопряжённого.

23. Банаховы алгебры. Пространство $\mathcal{L}(X)$ как банахова алгебра. Группа обратимых элементов банаховой алгебры и её открытость.

24. Спектр элемента банаховой алгебры, его непустота и компактность. Теорема Гельфанда—Мазура.

25. Теорема о спектральном радиусе элемента банаховой алгебры. Непрерывная зависимость спектра от элемента банаховой алгебры.