ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу «Функциональный анализ»
3 курс, 6 семестр, 2020/2021 уч.г.
(Поток Коновалова С.П.)

I. Метрические пространства

1. Метрические и топологические пространства. Примеры: l_p, $C_p[a, b]$ $(p \geq 1)$, $C^n[a, b]$. Неравенства Гельдера и Минковского.

II. Полные метрические пространства

1. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра.

2. Принцип сжимающих отображений.

III. Компактные метрические пространства

1. Компактность и центрированные системы замкнутых множеств.

2. Критерии компактности.

3. Теорема Арцела – Асколи.

IV. Линейные нормированные пространства

1. Теорема Рисса (некомпактность сферы в E, $\dim E = \infty$).

2. Характеристическое свойство евклидовых пространств. Банаховы и гильбертовы пространства.

3. Эквивалентность норм в конечном пространстве. Понятие линейного топологического пространства, примеры.

4. Теорема Рисса о проекции.

5. Сепарабельные гильбертовы пространства.

V. Линейные ограниченные операторы в линейных нормированных простанствах

1. Связь непрерывности и ограниченности линейного оператора.

2. Топологии и сходимости в пространстве операторов $L(E_1, E_2)$. Норма оператора. Полнота нормированного пространства $L(E_1, E_2)$ (в случае, когда E_2 – банахово).

3. Задача о продолжении непрерывного отображения. Продолжение линейного ограниченного оператора на замыкание области определения.

4. Теорема Банаха – Штейнгауза.

5. Полнота пространства $L(E_1, E_2)$ относительно поточечной сходимости. Критерий поточечной сходимости последовательности операторов из $L(E_1, E_2)$.

VI. Обратный оператор. Обратимость

1. Обратимость линейного, ограниченного снизу ($||Ax|| \geq k||x||$) оператора.

2. Обратимость возмущённого оператора $A + \Delta A$.

3. Формулировка теоремы Банаха об обратном операторе. Резольвентное множество оператора, спектр оператора и его компоненты.

VII. Аналитические свойства резольвенты

1. Операторнозначные функции комплексного переменного. Аналитичность резольвенты. Спектральный радиус. Основная теорема о спектре.

VIII. Сопряженное пространство. Теорема Рисса – Фреше. Теорема Хана – Банаха

1. Функционалы в гильбертовом пространстве. Теорема Рисса – Фреше.

2. Теорема Хана – Банаха и её следствия.

IX. Слабая сходимость в банаховом пространстве

1. Изометричность вложения E в E^{**}. Критерий слабой сходимости последовательности.

2. Слабая сходимость и ограниченные операторы.

X. Преобразование Фурье и свертка в пространствах $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$

1. Определения и основные свойства. Формула умножения. Преобразование Фурье свертки.

XI. Сопряженный оператор

1. Норма сопряженного оператора (в линейном нормированном пространстве).

2. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Равенство $H = KerA^* \oplus \overline{ImA}$.

XII. Самосопряженные операторы

1. Свойства квадратичной формы (Ax, x) и собственных значений самосопряженного оператора A.

2. Разложение гильбертова пространства $H = Ker(A - \lambda I) \oplus \overline{Im(A - \lambda I)}$, где A – самосопряженный оператор.

3. Критерий принадлежности числа спектру самосопряженного оператора. Вещественность спектра самосопряженного оператора.

4. Теорема о спектре самосопряжённого оператора: $\sigma(A) \subseteq [m_-, m_+], r(A) = ||A||$.

XIII. Компактные операторы

1. Свойства компактных операторов.

2. Свойства собственных значений компактного оператора.

3. Теорема Фредгольма для компактных самосопряжённых операторов.

4. Спектр компактного самосопряжённого оператора. Теорема Гильберта – Шмидта.

XIV. Элементы нелинейного анализа

1. Производная Фреше, производная Гато. Формула конечных приращений.

Литература

1. *А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин.* Элементы теории функций и функционального анализа.

2. *В.Хатсон, Дж.Пим.* Приложения функционального анализа и теории операторов