ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА
по курсу «Функциональный анализ и его приложения»
3 курс, 6 семестр, 2019/2020
(Поток Коновалова С.П.)

I. Метрические пространства.

1. Метрические и топологические пространства. Примеры: $\mathbf{l}_p$, $\mathbf{C}_p[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ $(1 \le p \le \infty)$, $\boldsymbol{C^n[a,b]}$. Неравенства Гельдера и Минковского.

II. Полные метрические пространства.

1. Теорема о вложенных шарах (2.1).
2. Принцип сжимающих отображений (2.2).

III. Компактные метрические пространства.

1. Компактность и центрированные системы замкнутых множеств (3.1).
2. Критерий компактности (3.2).
3. Теорема Арцела--Асколи (3.3).

IV. Линейные нормированные пространства.

1. Теорема Рисса (некомпактность сферы в $\mathbf{E}$, $\dim \mathbf{E} = \infty$) (4.1).
2. Характеристическое свойство евклидовых пространств (4.2). Банаховы и гильбертовы пространства.
3. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Понятие линейного топологического пространства, примеры.
4. Теорема Рисса о проекции (4.3).
5. Сепарабельные гильбертовы пространства (4.4, 4.5).

V. Линейные ограниченные операторы в банаховом пространстве.

1. Связь непрерывности и ограниченности линейного оператора (5.1).
2. Топологии и сходимости в пространстве операторов $L(\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2)$. Норма оператора. Полнота нормированного пространства $L(\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2)$ (5.2).
3. Задача о продолжении непрерывного отображения. Продолжение линейного ограниченного оператора на замыкание области определения (5.3).
4. Теорема Банаха–Штейнгауза (5.4).
5. Полнота пространства $L(\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2)$ относительно поточечной сходимости (5.5, 5.6).

VI. Обратный оператор. Обратимость.

1. Обратимость линейного, ограниченного снизу ($\|\mathbf{Ax}\| \ge k\|\mathbf{x}\|$) оператора (6.1).
2. Обратимость возмущённого оператора $\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}$ (6.2, 6.3).
3. Формулировка теоремы Банаха об обратном операторе (6.4). Резольвентное множество оператора, спектр оператора и его компоненты.

VII. Аналитические свойства резольвенты.

1. Операторнозначные функции комплексного переменного. Аналитичность резольвенты. Спектральный радиус (7.1).

VIII. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса–Фреше. Теорема Хана--Банаха.

1. Функционалы в гильбертовом пространстве. Теорема Рисса--Фреше (8.1).
2. Теорема Хана–Банаха (8.2), её следствия.

IX. Слабая сходимость в банаховом пространстве.

1. Изометричность вложения $\mathbf{E}$ в $\mathbf{E}^{**}$. Критерий слабой сходимости последовательности (9.1).
2. Слабая сходимость и ограниченные операторы (9.2).

XI. Сопряжённый оператор.

1. Норма сопряжённого оператора (11.1).
2. Сопряжённые операторы в гильбертовом пространстве. Равенство $(\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}^*)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}\,\mathbf{A}}$ (11.2).

XII. Самосопряжённые операторы.

1. Свойства квадратичной формы $(\mathbf{Ax},\mathbf{x})$ и собственных значений самосопряжённого оператора $\mathbf{A}$ (12.1).
2. Разложение гильбертова пространства $\mathbf{H} = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) \oplus \overline{\mathrm{Im}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})}$, где $\mathbf{A}$ — самосопряжённый оператор (12.2).
3. Критерий принадлежности числа спектру (12.3). Вещественность спектра самосопряжённого оператора (12.4).
4. Теорема о спектре самосопряжённого оператора (12.5): $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq [m_-, m_+]$, $r(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|$.

XIII. Компактные операторы.

1. Свойства компактных операторов (13.1).
2. Свойства собственных значений компактного оператора (13.2, 13.3).
3. Теорема Фредгольма для компактных самосопряжённых операторов (13.4).
4. Спектр компактного самосопряжённого оператора. Теорема Гильберта--Шмидта (13.5).

XIV. Элементы нелинейного анализа.

1. Производная Фреше, производная Гато. Формула конечных приращений (14.1)

Литература

1. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.*
2. В.Хатсон, Дж.Пим. *Приложения функционального анализа и теории операторов.*