

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА
по курсу «Уравнения математической физики»
3 курс, 5–6 семестры, 2020/2021 уч.г.
(Поток Михайловой Т.В.)

1. Линейное ДУ в частных производных второго порядка. Определение решения. Классификация ДУ в частных производных второго порядка. Понятие характеристики. Характеристики для линейных ДУ в частных производных второго порядка на плоскости.
2. Волновое уравнение в случае одной пространственной переменной:
 - постановка задачи Коши;
 - определение решения задачи Коши;
 - необходимые условия существования решения; формула Даламбера;
 - непрерывная зависимость решения от начальных функций;
 - постановка локализованной задачи Коши;
 - формула Даламбера в случае локализованной задачи Коши и области зависимости решения локализованной задачи Коши от начальных функций.

Пример отсутствия непрерывной зависимости в случае уравнения Лапласа (пример Адамара).

3. Волновое уравнение в случае трех пространственных переменных:
 - постановка задачи Коши;
 - определение решения;
 - необходимые условия существования решения;
 - теорема о существовании решения (обоснование формулы Кирхгофа);
 - теорема о единственности решения задачи Коши;
 - теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных функций.
4. Волновое уравнение в случае двух пространственных переменных:
 - постановка задачи Коши;
 - определение решения;
 - необходимые условия существования решения;
 - теорема о существовании решения (обоснование формулы Пуассона) – метод спуска;
 - теоремы о единственности решения и о непрерывной зависимости решения от начальных функций.

Распространение волн в случае двух и трех пространственных переменных. О диффузии волн.

5. Задача Коши для уравнения теплопроводности:
 - постановка задачи Коши;
 - определение решения задачи Коши;
 - необходимые условия существования решения;
 - теорема о существовании решения (обоснование формулы Пуассона);
 - бесконечная дифференцируемость решения задачи Коши;

- класс единственности решения задачи Коши (ограниченность в каждой полосе);
- теорема о единственности решения задачи Коши;
- принцип максимума;
- теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальной функции.

Отсутствие непрерывной зависимости решения для случая «обратной» теплопроводности.

6. Смешанная задача для уравнения теплопроводности (случай одной пространственной переменной):

- постановка задачи;
- определение решения;
- необходимые условия разрешимости (условия гладкости и условие согласования);
- лемма-принцип максимума;
- теорема о единственности решения;
- теорема о непрерывной зависимости решения от метод Фурье решения смешанной задачи;
- теорема о существовании решения (обоснование метода Фурье).

7. Смешанная задача для волнового уравнения (случай одной пространственной переменной):

- постановка задачи; определение решения;
- необходимые условия разрешимости (условия гладкости и условия согласования);
- лемма (метод интеграла энергии);
- теорема о единственности решения;
- теорема о непрерывной зависимости решения от начальных функций;
- метод Фурье решения смешанной задачи;
- теорема о существовании решения (обоснование метода Фурье).

8. Гармонические функции:

- определение;
- гармонические функции в $Rn, n = 2, 3, \dots$, которые зависят только от $|x|$;
- фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Первая формула Грина. Вторая формула Грина. Следствие из Второй формулы Грина для гармонической в области функции. Интегральное представление функции, гладкой в замыкании ограниченной области. Понятие потенциалов. Интегральное представление гармонической функции, гладкой в замыкании области. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теорема о поверхностном среднем. Теорема об объемном среднем. Теорема–строгий принцип максимума для гармонических функций. Теорема–ослабленный принцип максимума для гармонических функций. Теорема об устранении особенности. Теорема Лиувилля.

9. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области:

- постановка задачи Дирихле;
- определение решения;
- необходимые условия разрешимости;

- теорема о единственности решения;
- теорема о непрерывной зависимости решения от граничной функции.

Существование решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре:

- ядро Пуассона;
- теорема о существовании решения (обоснование формулы Пуассона).

10. Задача Неймана для уравнения Лапласа в шаре:

- постановка задачи; определение решения;
- необходимые условия разрешимости задачи;
- теорема об общем виде решения;
- теорема о существовании решения задачи Неймана для уравнения Лапласа в шаре.

11. Задача Дирихле в области внешнего типа (все доказательства для случая $n = 3$):

- преобразование инверсии;
- преобразование Кельвина функции $u(x)$ и его свойства (в частности преобразование Кельвина гармонической функции);
- область внешнего типа;
- понятие гармонической функции, регулярной на бесконечности;
- связь регулярности на бесконечности функции $u(x)$ и гармоничности преобразования Кельвина функции $u(x)$;
- принцип максимума и следствие из него (случай $n = 3$);
- постановка задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области внешнего типа;
- определение решения;
- необходимые условия разрешимости задачи;
- теорема о единственности решения;
- теорема о непрерывной зависимости решения от граничной функции;
- теорема о существовании решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа во внешности шара (случай $n = 3$)