ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

Уравнения математической физики, 2020-21 уч.г.

(Поток Р. В. Константинова, ФОПФ)

1. Сопряжённый оператор для линейного оператора в гильбертовом пространстве, его область определения. Самосопряжённость операторов координаты и импульса в пространстве $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.

2. Теорема Фредгольма о связи множества значений линейного оператора и ядра его сопряжённого. Теорема о связи графиков линейного оператора и его сопряжённого. Замкнутость сопряжённого оператора.

3. Теорема об операторе, сопряжённом к обратному для плотно определённого линейного оператора с тривиальным ядром.

4. Критерий замыкаемости плотно определённого линейного оператора в гильбертовом пространстве. Замыкаемость плотно определённого симметричного оператора. Пример незамыкаемого плотно определённого оператора.

5. Самосопряжённый линейный оператор в гильбертовом пространстве, его плотная определённость, замкнутость и симметричность. Пример несамосопряжённого замкнутого плотно определённого симметричного оператора.

6. Спектральное разложение самосопряжённого линейного оператора в гильбертовом пространстве, обладающего ортогональным базисом из своих собственных функций. Функциональное исчисление таких операторов.

7. Критерий самосопряжённости замыкания плотно определённого симметричного оператора. Самосопряжённость замыкания симметричного оператора, обладающего ортогональным базисом из собственных функций.

8. Оператор Лапласа в прямоугольнике $\mathit{\Pi}$ с однородными граничными условиями Дирихле или Неймана как симметричный плотно определённый оператор в $\mathbb{L}_2(\mathit{\Pi})$. Ортогональный базис в $\mathbb{L}_2(\mathit{\Pi})$ из его собственных функций, спектральное разложение замыкания этого оператора.

9. Начально-краевая задача для уравнения Шрёдингера в гильбертовом пространстве с самосопряжённым оператором, обладающим ортогональным базисом из собственных функций, метод Фурье её решения. Оператор эволюции.

10. Формулы Грина для оператора Лапласа $\Delta\colon C^2(\overline{G}) \to \mathbb{L}_2(G)$ в ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^m$ с кусочно–гладкой границей, замыкаемость этого оператора.

11. Неравенство Фридрихса для функции $f \in C^1(\overline{G})$ и ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^m$ с кусочно–гладкой границей.

12. Задача Дирихле для уравнения Лапласа $\overline{\Delta} u = 0$ в $\mathbb{L}_2(G)$ для ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^m$ с кусочно–гладкой границей, теорема единственности решения этой задачи.

13. Задача Неймана для уравнения Лапласа $\overline{\Delta} u = 0$ в $\mathbb{L}_2(G)$ для ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^m$ с кусочно–гладкой границей, теорема о равенстве двух её решений с точностью до константы.

14. Задача Дирихле в круге $K \subset \mathbb{R}^2$ для уравнения Лапласа $\overline{\Delta} u = 0$ в $\mathbb{L}_2(K)$, существование и единственность её решения.

15. Собственные числа и собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами на сфере $S \subset \mathbb{R}^3$, сферические функции. Ортогональный базис в пространстве $\mathbb{L}_2(S)$ из сферических функций.

16. Задача Дирихле в шаре $B \subset \mathbb{R}^3$ для уравнения Лапласа $\overline{\Delta} u = 0$ в $\mathbb{L}_2(B)$, существование и единственность её решения.

17. Спектр линейного оператора в гильбертовом пространстве. Вещественность спектра самосопряжённого оператора. Критерий принадлежности вещественного числа спектру самосопряжённого оператора.

18. Теорема о спектре плотно определённого симметричного оператора в гильбертовом пространстве. Самосопряжённость плотно определённого симметричного оператора с вещественным спектром.

19. Компактные операторы в гильбертовом пространстве. Теорема о приближении компактного оператора непрерывным конечномерным оператором. Теорема Фредгольма о компактности оператора, сопряжённого к компактному оператору.

20. Теорема Фредгольма о равенстве $(\mathrm{Ker}(A_\lambda)^*)^\perp$ и $\mathrm{Im}(A_\lambda)$ для компактного оператора A в гильбертовом пространстве и нетривиального числа λ.

21. Теорема Фредгольма о равенстве размерностей $\mathrm{Ker}(A_\lambda)$ и $\mathrm{Ker}(A_\lambda)^*$ для компактного оператора A в гильбертовом пространстве и нетривиального числа λ. Альтернатива Фредгольма.

22. Теорема Фредгольма о спектре компактного оператора в гильбертовом пространстве.

23. Теорема Гильберта–Шмидта для компактного самосопряжённого оператора в гильбертовом пространстве. Вычисление резольвенты компактного самосопряжённого оператора.

24. Интегральные операторы в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2(K)$ для компакта $K \subset \mathbb{R}^m$. Компактность интегрального оператора. Интегральный самосопряжённый оператор в $\mathbb{L}_2(K)$, существование ортогонального базиса в $\mathbb{L}_2(K)$ из его собственных функций, его спектральное разложение и резольвента.

25. Симметричный оператор Штурма–Лиувилля и критерий его обратимости. Самосопряжённость и компактность оператора, обратного к оператору Штурма–Лиувилля. Теорема Стеклова.

26. Собственные числа и собственные функции оператора Лапласа в круговом секторе или круге при однородных граничных условиях. Функции Бесселя и свойство их ортогональности. Свойства нулей функций Бесселя.

27. Ортогональный базис в пространстве $\mathbb{L}_2(K)$ из собственных функций оператора Лапласа в круговом секторе или круге $K \subset \mathbb{R}^2$ при однородных граничных условиях.

28. Определение обобщённого решения по Л. Шварцу линейного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами на открытом множестве и его корректность по отношению к определению классического решения.

29. Постановка обобщённой задачи Коши для линейного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. Корректность решения обобщённой задачи Коши по отношению к решению классической задачи.

30. Пространства Л. Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Обобщённое преобразование Фурье в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и его свойства.

31. Представление обобщённого преобразования Фурье в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ как предел действия на «срезанную экспоненту».

32. Свёртка обобщённых функций в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и её свойства, связанные с обобщённым дифференцированием.

33. Носитель обобщённой функции из пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Теорема о носителе свёртки обобщённой функции.

34. Теорема о преобразовании Фурье свёртки обобщённых функций в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

35. Достаточное условие существования единственной функции Грина дифференциального оператора в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Функции Грина оператора $\frac{\partial}{\partial t} + (a, \nabla_x) + b$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ для вектора $a \in \mathbb{R}^m$ и числа $b > 0$.

36. Общий вид функции Грина линейного дифференцильного оператора $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ для произвольного комплексного многочлена $P(z)$.

37. Функция Грина оператора Гельмгольца $\Delta_x - k^2$ для $k > 0$ в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^3\right)$ и её предел в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^3\right)$ при $k \to +0$ как функция Грина оператора Лапласа.

38. Вычисление функции Грина оператора Гельмгольца $\Delta_x + k^2$ для $k > 0$ в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^3\right)$ методом регуляризации. Неединственность функции Грина этого оператора.

39. Обобщённое решение уравнения Пуассона в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^3\right)$ для источника из $\mathbb{L}(\mathbb{R}^3)$. Теорема о вложении решения в $C^2(G)$ для открытого множества $G \subset \mathbb{R}^3$, если дополнительно источник принадлежит $C^1(G)$.

40. Функция Грина оператора Даламбера $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_x$ в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3\right)$ и её единственность.

41. Обобщённое решение волнового уравнения в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3\right)$ с регулярным источником медленного роста, запаздывающий потенциал.

42. Обобщённое решение задачи Коши для волнового уравнения в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3\right)$ с регулярными начальными условиями медленного роста, формула Кирхгоффа.

43. Функция Грина оператора Шрёдингера $i\frac{\partial}{\partial t} + a^2\Delta_x$ в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m\right)$. Решение обобщённой задачи Коши для уравнения Шрёдингера в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\right)$ с начальным условием из $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$.

44. Функция Грина оператора $\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta_x$ в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m\right)$ и её единственность.

45. Обобщённое решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m\right)$ с регулярным начальным условием медленного роста, формула Пуассона.