

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА
по курсу "Уравнения математической физики"
3 курс, 6 семестр, 2019-2020 учебный год
(Поток В.И. Зубова)

1. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с линейной старшей частью в точке $x \in R^n$. Классификация уравнений.
2. Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду на плоскости. Понятие о методе характеристик.
3. Постановка задачи Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка с частными производными с линейной старшей частью в R^n . Понятие о характеристической поверхности.
4. Понятие о корректности задачи Коши. Пример Адамара некорректной задачи (задача Коши для уравнения Лапласа).
5. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера. Область зависимости решения задачи Коши от начальных данных. Существование и единственность классического решения задачи.
6. Смешанная задача для колебаний полубесконечной струны с закреплённым концом. Условия согласования начальных и граничного данных. Существование и единственность классического решения задачи.
7. Формула Пуассона-Кирхгофа решения задачи Коши для однородного волнового уравнения в R^3 . Принцип Гюйгенса.
8. Метод Дюамеля решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения в R^3 . Общая формула Кирхгофа.
9. Задача Коши для волнового уравнения в R^2 . Метод спуска. Формула Пуассона. Диффузия волн в R^2 .
10. Теорема о единственности классического решения задачи Коши для волнового уравнения (метод интеграла энергии).
11. Постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в R^1 . Существование классического решения задачи Коши при непрерывной ограниченной начальной функции и его свойства.
12. Применение метода Дюамеля для решения неоднородного уравнения теплопроводности.
13. Принцип максимума для параболического уравнения.
14. Единственность классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в классе ограниченных функций.
15. Решение методом Фурье смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке с однородными краевыми условиями Дирихле. Существование и единственность классического решения.
16. Решение методом Фурье смешанной задачи для уравнения колебаний струны с закреплёнными концами. Обоснование метода для случая однородного уравнения.
17. Постановка краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Единственность решения задачи Дирихле в классе $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана.
18. Задача на собственные значения и собственные функции для оператора Лапласа в круге при однородном краевом условии Дирихле. Дифференциальное уравнение Бесселя. Функции Бесселя первого рода и их свойства. Выражение для собственных функций и собственных значений круглой мембраны с закреплёнными краями через функции Бесселя.
19. Интегральное представление решений уравнений Пуассона и Лапласа в ограниченной области.

20. Гармонические функции в R^3 и их свойства. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теорема о среднем.
21. Принцип максимума и минимума для гармонических функций.
22. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области. Единственность классического решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона при непрерывной граничной функции (в классе $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$).
23. Функция Грина задачи Дирихле (случай R^3). Функция Грина для шара. Формула Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.
24. Постановка внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в R^3 . Единственность решения внешних задач Дирихле и Неймана в R^3 .
25. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с малым по норме интегральным оператором K . Представление решения интегрального уравнения рядом Неймана. Ограниченность оператора $(I - \lambda K)^{-1}$.
26. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами. Сведение их к системе линейных алгебраических уравнений. Теоремы Фредгольма в этом случае.
27. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с непрерывными и полярными ядрами. Теоремы Фредгольма в общем случае.
28. Объёмный ньютонов потенциал и его свойства.
29. Потенциал простого слоя, его свойства.
30. Потенциал двойного слоя, его свойства.
31. Сведение задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа посредством потенциалов к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода на границе. Однозначная разрешимость внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана.