Экзаменационная программа
по дисциплине «Многомерный анализ, интегралы и ряды», весенний семестр 2020–2021 учебного года
для всех школ, кроме ЛФИ и ПМИ (ФИВТ)

1. Предел последовательности точек в n–мерном евклидовом пространстве. Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. Внутренние, предельные, изолированные точки множества. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества. Компакты. *Метрическое пространство. Компакты в метрическом пространстве и описание компактов в n–мерном евклидовом пространстве*[1].

2. Предел числовой функции нескольких переменных. Предел функции по множеству. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству. *Критерий непрерывности*[2]. Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижение точных нижней и верхней граней, равномерная непрерывность (*теорема Кантора*[3]). *Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области*[4]. *Связные множества. Свойства функций, непрерывных на связном множестве*[5]. *Непрерывные отображения компактных и линейно связных подмножеств конечномерных пространств*[6].

3. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости, необходимые и достаточные условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных. Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных. Производная по направлению и градиент, их связь и геометрический смысл. *Производная отображения конечномерных пространств и матрица Якоби*[7].

4. Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано.

5. Определение измеримости по Жордану множества в n–мерном евклидовом пространстве. Критерий измеримости. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Жордана. *Измеримость и мера цилиндра в $(n+1)$–мерном пространстве*[8].

6. Определенный интеграл Римана. Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства. Критерий интегрируемости.

Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции, ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем. Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференцируемость.

---

[1] Для потоков Н.А. Гусева, Л.Н. Знаменской и Е.Ю. Редкозубовой.
[2] Для потока Е.Ю. Редкозубовой.
[3] Для потоков Я.М.Дымарского и А.П. Черняева теорема Кантора без доказательства.
[4] Для всех, кроме потока Е.Ю. Редкозубовой.
[5] Для потока Е.Ю. Редкозубовой.
[6] Для потока Я.М. Дымарского.
[7] Для потока Я.М. Дымарского.
[8] Для всех, кроме потока А.П.Черняева.

Формула Ньютона–Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. *Формулы Бонне и вторая теорема о среднем*[9].

7. Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой. Вычисление площади поверхности вращения (*без доказательства*)[10].

8. Криволинейный интеграл первого рода. Криволинейный интеграл второго рода.

9. Несобственный интеграл. Критерий Коши сходимости интеграла. Интегралы от знакопостоянных функций, признак сравнения сходимости. Интегралы от знакопеременных функций, абсолютная и условная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.

10. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды: признак сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость, признаки Лейбница, Дирихле и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Теорема Римана о перестановках членов условно сходящегося ряда (без доказательства). Произведение абсолютно сходящихся рядов.

11. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов. Признаки Вейерштрасса, *Дирихле и Абеля* равномерной сходимости функциональных рядов[11].

12. Степенные ряды с комплексными членами. Первая теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости. Непрерывность суммы степенного ряда в круге сходимости. Формула Коши–Адамара. Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при почленном дифференцировании и интегрировании ряда. Вторая теорема Абеля.

13. Степенные ряды с действительными членами. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости. Единственность представления функции степенным рядом. Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд. Ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций: e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

Разложение в степенной ряд комплекснозначной функции e^z.

[9] Для потока А.П.Черняева.

[10] Для потока Я.М.Дымарского весь п.7 без доказательства.

[11] Для потоков Я.М. Дымарского и Л.Н. Знаменской признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов — без доказательства.