Экзаменационная программа по курсу
«Многомерный анализ, интегралы и ряды»
весенний семестр 2020-21 уч.г., ФИВТ

1. Несобственные интегралы Римана и их свойства. Критерий Коши. Абсолютная и условная сходимости несобственных интегралов. Интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения и его следствия. Формула Бонне. Признаки Дирихле и Абеля.

2. Числовые ряды и их свойства. Группировка ряда. Критерий Коши. Абсолютная и условная сходимости рядов. Ряды с неотрицательными членами. Признак сравнения и его следствия. Признаки Коши и Даламбера, интегральный признак. Преобразование Абеля, признаки Дирихле и Абеля. Признак Лейбница. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана о перестановке*.[1] Произведение абсолютно сходящихся рядов. Теорема Мертенса*.

3. Равномерно сходящиеся функциональные последовательности и ряды, их свойства. Критерий Коши равномерной сходимости. Достаточные условия непрерывности предельной функции и суммы ряда. Достаточные условия дифференцируемости и интегрируемости предельной функции. Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов. Почленное дифференцирование функциональных последовательностей и рядов. Признаки Вейерштрасса, Дирихле, Абеля равномерной сходимости рядов. Признак Дини*. Пример ван-дер-Вардена*.

4. Степенные ряды, их радиус сходимости. Формула Коши–Адамара. Равномерная сходимость степенных рядов. Теорема Абеля. Комплексная дифференцируемость суммы степенного ряда. Теорема единственности, ряд Тейлора. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Ряды Тейлора показательной и тригонометрических функций. Биномиальный ряд, его равномерная сходимость при $\alpha > 0$. Комплексная экспонента*.

5. Метрические и нормированные пространства, p-нормы на $\mathbb{R}^n$. Топология метрических пространств: открытые и замкнутые множества, их свойства. Критерии замкнутости множества. Замыкание множества. Подпространства метрического пространства, описание открытых множеств подпространства. Компакты и их свойства. Описание компактов в $\mathbb{R}^n$. Критерий компактности на языке последовательностей. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Полные метрические пространства. Полнота пространств $\mathbb{R}^n$ и $B(E)$.

6. Предел и непрерывность функции, отображающей метрическое пространство в метрическое пространство. Равносильные определения предела и непрерывности. Непрерывность композиции. Критерий непрерывности. Непрерывные функции на компактах. Теорема Вейерштрасса. Эквивалентность норм в конечномерных пространствах*. Теорема Кантора о равномерной непрерывности. Связные множества в метрических пространствах. Описание связных множеств в $\mathbb{R}$. Непрерывные функции на связных множествах. Теорема о промежуточном значении. Линейно связные множества. Непрерывные линейные отображения нормированных простанств.

7. Дифференцируемость в точке функции, отображающей нормированное пространство в нормированное пространство. Производная по вектору и ее связь с дифференциалом. Дифференцируемость композиции.

Случай функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Связь дифференцируемости функции с дифференцируемостью ее координатных функций. Частные производные и градиент. Матрица Якоби. Достаточные условия дифференцируемости. Частные производные высших порядков. Независимость смешанной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков и кратная дифференцируемость. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, в форме Пеано*.

8. Алгебры и σ-алгебры. Борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$. Меры, свойство непрерывности меры. Внешние меры и конструкция Каратеодори*. Объем бруса. Внешняя мера Лебега. Измеримые по Лебегу множества, измеримость борелевских множеств. Совпадение внешней меры бруса с его объемом, измеримость брусов. Критерий измеримости множества. Мера Лебега при линейном преобразовании.

---

[1] Вопросы со звездочкой – без доказательства.

9. Измеримые функции. Согласованность измеримости функций с арифметическими операциями. Измеримость точных граней и предела последовательности измеримых функций. Простые функции. Теорема о приближении измеримой функции простыми.

10. Интеграл от неотрицательной простой функции и его свойства. Интеграл от неотрицательной измеримой функции. Монотонность интеграла по функциям и по множествам. Теорема Б. Леви о монотонной сходимости. Линейность и счетная аддитивность интеграла от неотрицательной измеримой функции. Неравенство Чебышева. Интеграл Лебега от произвольной измеримой функции. Интегрируемые функции. Одновременная интегрируемость функции и ее модуля. Конечность почти всюду интегрируемой функции. Пренебрежение при интегрировании множествами меры нуль. Монотонность и линейность интеграла. Теорема Лебега о мажорированной сходимости. Связь интеграла Лебега и определенного интеграла Римана.