Экзаменационная программа
по дисциплине «Многомерный анализ, интегралы и ряды»
ФИВТ
весенний семестр 2019–2020 учебного года

1. Евклидовы пространства. Неравенства Коши-Буняковского-Щварца.
2. Линейные нормированные пространства, норма в евклидовом пространтстве, неравенство Минковского.
3. Метрические пространства, метрика в линейных нормированных пространствах.
4. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Открытость открытого шара, замкнутость замкнутого шара.
5. Открытость внутренности, замкнутость замыкания.
6. Дополнение замкнутого множества, граница.
7. Основное свойство совокупности открытых множеств, топология.
8. Свойства предела последовательности в $\mathbb{R}^n$.
9. Критерии сходимости последовательностей в $\mathbb{R}^n$ (Коши, покомпонентный).
10. Теорема Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}^n$.
11. Критерий замкнутости множеств (в терминах последовательностей).
12. Замкнутость компактных множеств. Компактность замкнутых подмножеств.
13. Компактность n-мерного куба.
14. Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$.
15. Эквивалентные определения непрерывных отображений.
16. Непрерывный образ компактного множества.
17. Пределы по направлениям, по совокупности переменных, повторные пределы.
18. Непрерывность сложной функции многих переменных.
19. Теорема Кантора о равномерной непрерывности на компактном множестве.
20. (Линейная) связность. Теорема Больцано-Коши в $\mathbb{R}^n$.
21. *[1] Связность открытых множеств.
22. Дифференцируемость функций многих переменных и наличие частных производных.

[1] Вопрос со звездочкой может быть задан только с целью повышения оценки с согласия студента

23. Дифференцируемость сложной функции.

24. Касательная плоскость.

25. Градиент, его геометрический смысл.

26. Теоремы Шварца и Юнга* о независимости смешанных производных от порядка дифференцирования.

27. Формула Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано.

28. Суммы Дарбу, их свойства.

29. Критерий интегрируемости.

30. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций.

31. Основные свойства интеграла Римана.

32. Интегрируемость сложной функции.

33. *Интеграл как предел интегральных сумм.

34. *Интегрируемость функций с конечным числом точек разрыва.

35. Свойства интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.

36. Формулы интегрирования по частям и замены переменной в интеграле Римана.

37. Первая и вторая* теоремы о среднем для интеграла Римана.

38. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

39. *Два основных случая вычисления интегралов Римана-Стилтьеса.

40. *Теоремы о среднем, замена переменной в интеграле Римана-Стилтьеса.

41. Критерий Коши и признак сравнения для несобственных интегралов Римана.

42. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.

43. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов.

44. *Признак Харди.

45. Необходимое условие сходимости числовых рядов, критерий сходимости рядов с неотрицательными членами.

46. Признаки сравнения и интегральный (Коши-Маклорена) сходимости числовых рядов.

47. Признаки Даламбера и Коши сходимости числовых рядов.

48. *Регулярность метода Чезаро, сравнение предельных форм признаков Даламбера и Коши.
49. Критерий Коши сходимости числовых рядов, абсолютная и условная сходимость.
50. Признак Лейбница.
51. Признаки Дирихле и Абеля* сходимости числовых рядов.
52. Перестановки абсолютно сходящихся рядов.
53. *Теорема Римана о перестановках.
54. Произведение абсолютно сходящихся рядов.
55. *Произведение рядов по Коши. Теорема Мертенса.
56. Критерий Коши и признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.
57. Признаки Дирихле и Абеля* равномерной сходимости функциональных рядов.
58. Предельный переход в равномерно сходящихся функциональных последовательностях и рядах.
59. *Признак Дини.
60. Равномерная сходимость и интегрирование.
61. Дифференцирование функциональных последовательностей и рядов.
62. *Пример ван дер Вардена.
63. Радиус сходимости степенных рядов.
64. Равномерная сходимость степенных рядов, вторая теорема Абеля, ее следствие*.
65. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов.
66. Достаточное условие представления функции рядом Тейлора.
67. Представления основных элементарных функций рядами Маклорена.
68. Кольцо элементарных множеств, их объем и его свойства.
69. *Счетная аддитивность объема на кольце элементарных множеств.
70. Свойства внешних мер Лебега и Жордана.
71. *Внутренняя мера, ее основное свойство.
72. Критерий измеримости.
73. Алгебра измеримых множеств. Конечная аддитивность мер Лебега и Жордана.

74. σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств. σ-аддитивность меры Лебега.
75. Непрерывность меры Лебега.
76. *Структура открытых множеств в $\mathbb{R}^n$.
77. *Структура измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$.
78. Критерий измеримости по Жордану.
79. Канторово множество.
80. *Пример неизмеримого по Лебегу множества.
81. Образ куба меньшей размерности.
82. *Диффеомерфный образ измеримого по Лебегу множества.
83. Измеримые функции, возможность использования разных неравенств в определении.
84. Арифметические операции с измеримыми функциями, измеримость сложной функции.
85. *Пример неизмеримой композиции измеримой и непрерывной функций.
86. Предельный переход и измеримость.
87. *Представление измеримых функций пределами последовательностей ступенчатых.
88. *Связь сходимости по мере и сходимости почти всюду.
89. *Вычисление площадей.
90. *Объем тела вращения.
91. *Сапог Шварца. Площадь поверхности тела вращения.
92. Теорема о неявной функции, определяемой одним уравнением.
93. Теорема о неявных функциях, определяемых системой уравнений (доказательство*).
94. Локальная обратимость отображений.
95. Необходимое условие локального экстремума.
96. Достаточное условие локального экстремума.
97. Необходимое условие условного экстремума.
98. Достаточное условие условного экстремума (доказательство*).
99. *Линейные ограниченные операторы. Норма оператора.
100. *Сильная производная, ее единственность.
101. *Производная композиции отображений.

102. *Формула Лагранжа в линейном нормированном пространстве.

103. *Связь между слабой и сильной дифференцируемостью.

104. *Производные высших порядков отображений. Пример О.В. Бесова.

105. *Бесконечные произведения, их сходимость.

106. *Представление $\sin x$ в виде бесконечного произведения.

107. *Формула Стирлинга.