

**Экзаменационная программа по курсу  
«Многомерный анализ, интегралы и ряды»  
весенний семестр 2018-19 уч.г., ФИВТ**

1. Несобственные интегралы Римана и их свойства. Критерий Коши. Абсолютная и условная сходимости несобственных интегралов. Интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения и его следствия. Признаки Дирихле и Абеля.

2. Числовые ряды и их свойства. Группировка членов ряда. Критерий Коши. Абсолютная и условная сходимости рядов. Ряды с неотрицательными членами. Признак сравнения и его следствия. Признаки Коши и Даламбера, интегральный признак. Преобразование Абеля, признаки Дирихле и Абеля. Признак Лейбница. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда. Произведение абсолютно сходящихся рядов.

3. Равномерно сходящиеся функциональные последовательности и ряды, их свойства. Критерий Коши равномерной сходимости. Непрерывность равномерного предела непрерывных функций и суммы равномерно сходящегося ряда с непрерывными членами. Теорема о производной предела последовательности дифференцируемых функций. Почленное дифференцирование функциональных рядов. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

4. Степенные ряды, их радиус сходимости. Формула Коши–Адамара. Равномерная сходимости степенных рядов в круге. Теорема Абеля. Комплексная дифференцируемость суммы степенного ряда. Существование первообразной. Теорема единственности. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Ряды Тейлора показательной, тригонометрических, степенной и логарифмической функций. Комплексная экспонента. Формулы Эйлера.

5. Метрические пространства. Пространство  $\mathbb{R}^n$ . Последовательности в метрических пространствах. Лемма о покоординатной сходимости. Полные метрические пространства. Полнота пространства  $\mathbb{R}^n$ . Топология метрических пространств: открытые и замкнутые множества, их свойства. Критерий замкнутости множества. Замыкание множества. Открытость относительно индуцированной метрики. Компакты и их свойства. Критерий компактности в  $\mathbb{R}^n$ . Теорема Больцано–Вейерштрасса.

6. Предел и непрерывность функции, отображающей метрическое пространство в метрическое пространство. Равносильные определения предела и непрерывности. Непрерывность композиции. Критерий непрерывности через прообраз открытого множества. Непрерывные функции на компактах. Теорема Вейерштрасса. Теорема Кантора о равномерной непрерывности. Связные множества в метрических пространствах. Описание связных множеств в  $\mathbb{R}$ . Непрерывные функции на связных множествах. Теорема о промежуточном значении. Линейно связные множества. Непрерывность линейных отображений из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^m$ .

7. Дифференцируемость функции многих переменных в точке. Связь дифференцируемости функции с дифференцируемостью ее координатных функций. Производная по вектору и частные производные. Необходимые условия дифференцируемости. Градиент и его связь с производной по направлению. Достаточные условия дифференцируемости. Дифференцируемость композиции. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости смешанной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции многих переменных.

8. Объем бруса в  $\mathbb{R}^n$ . Внешняя мера Лебега, ее монотонность и счетная полуаддитивность. Совпадение внешней меры бруса с его объемом. Измеримые по Лебегу множества. Измеримость объединения и пересечения двух измеримых множеств. Счетная аддитивность и непрерывность меры Лебега. Измеримость открытых и замкнутых множеств. Критерий измеримости множества.

9. Измеримые функции. Согласованность измеримости функций с арифметическими операциями. Измеримость точных граней и предела последовательности измеримых функций. Простые функции. Теорема о приближении неотрицательной измеримой функции простыми.

**10.** Интеграл Лебега от неотрицательной простой функции и его свойства. Интеграл Лебега от неотрицательной измеримой функции. Монотонность интеграла по функциям и по множествам. Теорема Б. Леви о монотонной сходимости. Линейность интеграла Лебега от неотрицательной измеримой функции. Неравенство Чебышева. Интеграл Лебега от произвольной измеримой функции. Интегрируемые функции. Одновременная интегрируемость функции и ее модуля. Конечность почти всюду интегрируемой функции. Пренебрежение при интегрировании множествами меры нуль. Монотонность, линейность и счетная аддитивность интеграла Лебега интегрируемых функций. Теорема Лебега о мажорированной сходимости. Связь интеграла Лебега и определенного интеграла Римана.