

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА ПО КУРСУ
«МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ, ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ» 2020-21 уч.г., ЛФИ

- (1) Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды. Признаки сравнения сходимости числовых рядов. Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак сходимости числового ряда. Знакопеременные ряды. Сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Лейбница, Дирихле и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда. Перемножение абсолютно сходящихся рядов.
- (2) Мера Лебега. Клеточные множества. Верхняя мера Лебега и ее счетная полуаддитивность. Мера Лебега и ее счетная аддитивность. Непрерывность меры Лебега. Теорема о том, что семейство измеримых подмножеств \mathbb{R}^n является σ -кольцом.
- (3) Измеримые функции. Измеримость суммы и поточечного предела измеримых функций. Интеграл Лебега для счетно-ступенчатых и для измеримых функций, линейность интеграла Лебега. Теорема о существовании интеграла от неотрицательной измеримой функции. Счетная аддитивность и непрерывность интеграла Лебега по множествам интегрирования. Связь интегрируемости функции и интегрируемости ее положительной и отрицательной составляющих. Связь интегрируемости функции и интегрируемости ее модуля. Интегральная теорема о среднем.
- (4) Непрерывность интеграла как функции верхнего предела. Существование первообразной для непрерывной на отрезке функции. Формула Ньютона-Лейбница. Формулы замены переменных в интеграле и интегрирования по частям.
- (5) Мера декартова произведения двух конечно измеримых множеств. Выражение меры множества под графиком интегрируемой функции через интеграл. Площадь круга. Выражение объема тела вращения и длины кривой через интегралы. Связь интегрируемости по Риману и интегрируемости по Лебегу. Интегрируемость по Риману непрерывной на отрезке функции.
- (6) Предельный переход под знаком интеграла. Теорема Б. Леви о монотонной сходимости. Теорема Лебега об ограниченной сходимости.
- (7) Несобственный интеграл. Связь сходимости несобственного интеграла и интегрируемости функции по Лебегу. Критерий Коши. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов.
- (8) Связь поточечной и равномерной сходимостей для функциональной последовательности. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Обобщенный признак сравнения для функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Признаки Дирихле и Лейбница равномерной сходимости функционального ряда. Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность равномерного предела непрерывных функций и суммы равномерно сходящегося функционального ряда с непрерывными слагаемыми. Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов. Дифференцирование предельной функции и почленное дифференцирование функционального ряда.

- (9) Степенные ряды. Формула Коши–Адамара для радиуса сходимости. Теорема о круге сходимости степенного ряда. Первая теорема Абеля. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Вторая теорема Абеля. Сохранение радиуса сходимости при почленном дифференцировании степенного ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда. Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора. Достаточное условие аналитичности функции. Пример бесконечно дифференцируемой, но неаналитической функции. Представление экспоненты комплексного аргумента степенным рядом. Формулы Эйлера. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Представление степенной и логарифмической функций степенными рядами.
- (10) Дифференцируемость, дифференциал, градиент и производная по вектору для функции нескольких переменных, их связь и геометрический смысл. Достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных. Матрица Якоби. Дифференцирование суперпозиции вектор-функций.
- (11) Частные производные высших порядков. Теорема о независимости смешанных производных от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано.
- (12) Теорема о неявной функции для одного уравнения. Теорема Лагранжа о среднем для вектор функции нескольких переменных. Принцип Банаха сжимающих отображений. Теорема о неявной функции для системы уравнений. Теорема об обратном отображении. Теорема о расщеплении отображений.