

**ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА**  
Линейная алгебра. Весенний семестр 2019/20 г. ФОПФ.

**Векторные пространства.**

1. Векторное пространство. Подпространство. Линейная оболочка системы векторов. Понятие линейно (не)зависимой системы векторов. Ранг системы векторов, его связь с размерностью линейной оболочки.
2. Базис и размерность линейного пространства. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты. Изменение координат вектора при изменении базиса. Матрица перехода.
3. Подпространства в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств, её характеристика, прямое дополнение подпространства, проекция на подпространство вдоль прямого дополнения. Связь размерностей суммы и пересечения подпространств.

**Линейные отображения.**

1. Линейные отображения (гомоморфизмы) и линейные преобразования (линейные операторы) векторного пространства. Изоморфизмы. Операции над линейными отображениями, линейное пространство линейных отображений. Алгебра линейных операторов.
2. Матрицы линейного отображения. Связь операций над матрицами и линейными преобразованиями. Изменение матриц линейного отображения и линейного преобразования при изменении базиса. Группа биективных линейных преобразований и группа  $GL_n(\mathbb{R})$ .
3. Ядро и образ. Критерий инъективности.
4. Двумерное аффинное пространство (плоскость). Аффинные преобразования плоскости (примеры и основные свойства).

**Структура линейного преобразования.**

1. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения (спектр). Характеристический многочлен и его инвариантность. Определитель и след преобразования.
2. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих попарно различным собственным значениям. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Условия диагонализуемости преобразования.
3. Инвариантные подпространства малой размерности в комплексном и вещественном случаях. Треугольный вид.
4. Корневые подпространства. Теорема Гамильтона–Кэли. Формулировка теоремы о существовании и единственности жордановой нормальной формы (ЖНФ). Минимальный многочлен.

**Билинейные формы.**

1. Билинейные (полуторалинейные) формы. Координатная запись билинейной формы. Матрица билинейной формы и ее изменение при замене базиса.
2. Симметричные билинейные (полуторалинейные) формы. Взаимно-однозначное соответствие с квадратичными (эрмитовыми квадратичными) формами. Приведение квадратичной формы к диагональному и каноническому виду (двойные элементарные преобразования). Закон инерции. Знакоопределенные и полуопределенные формы, их диагональный вид. Критерий Сильвестра.

**Пространства со скалярным произведением.**

1. Евклидово и унитарное пространства. Матрица Грама и ее свойства. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца, неравенство треугольника. Метрика. Выражение скалярного произведения в координатах.

2. Ортогональные системы векторов и подпространств. Существование ортонормированных базисов (ОНБ). Изоморфизм евклидовых пространств. Переход от ОНБ к ОНБ. Ортогональные и унитарные матрицы.
3. Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональная проекция. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта.
4. Преобразование, сопряженное данному. Его существование и единственность, его матрица в ОНБ. Теорема Фредгольма.
5. Самосопряженные линейные преобразования. Свойства самосопряжённых преобразований, существование ОНБ из собственных векторов.
6. Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства. Канонический вид унитарного (ортогонального) преобразования. Описание ортогональных преобразований в малых размерностях.
7. Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве.
8. Квадратичные формы в евклидовых (унитарных) пространствах, приведение к диагональному виду. Применение к ортогональной классификации кривых и поверхностей второго порядка. Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду.

### **Сопряженное пространство.**

1. Линейные функции. Сопряженное (двойственное) пространство, его размерность.
2. Биортогональный (взаимный) базис. Свертка. Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряженного к нему. Понятие об аннуляторных подпространствах, сопряженном преобразовании.
3. Канонический изоморфизм евклидова пространства и его сопряженного.

### **Тензоры.**

1. Полилинейные отображения. Определение тензора типа  $(p, q)$ , изменение координат при замене базиса. Примеры.
2. Понятие об основных операциях с тензорами. Примеры.