

**Экзаменационная программа
по дисциплине «Линейная алгебра»
ЛФИ, 1 курс, 2 семестр, 2021-2022 учебный год**

Векторные пространства

1. Векторное пространство. Подпространство. Линейная оболочка системы векторов. Линейно (не)зависимые системы векторов. Ранг системы векторов, его связь с размерностью линейной оболочки.
2. Базис и размерность линейного пространства. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты. Изменение координат вектора при замене базиса. Матрица перехода.
3. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств, её характеристики, прямое дополнение подпространства, проекция на подпространство вдоль прямого дополнения. Связь размерностей суммы и пересечения подпространств. Понятие внешней прямой суммы и факторпространства.
4. Понятие аффинного пространства, связь между аффинным и векторным пространством.

Линейные отображения

1. Линейные отображения и линейные преобразования векторных пространств. Операции над линейными отображениями, линейное пространство линейных отображений. Алгебра линейных операторов. Изоморфизмы.
2. Матрица линейного отображения. Координатная запись линейного отображения. Связь операций над матрицами и над линейными отображениями. Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базиса.
3. Ядро и образ, их описание в терминах матрицы линейного отображения. Критерий инъективности. Связь между размерностями ядра и образа.
4. Аффинные преобразования плоскости, их свойства.

Структура линейного преобразования

1. Инвариантные подпространства.
2. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен и его инвариантность. Определитель и след преобразования.
3. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих попарно различным собственным значениям. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Условия диагонализуемости преобразования.
4. Инвариантные подпространства малой размерности в вещественном случае.
5. Корневые подпространства. Теорема Гамильтона-Кэли.
6. Жорданова нормальная форма, её существование и единственность. Минимальный многочлен. Связь с линейными дифференциальными уравнениями и линейными рекуррентными соотношениями.

Билинейные формы

1. Билинейные (полуторалинейные) формы. Координатная запись билинейной формы. Матрица билинейной формы и её изменение при замене базиса.

2. Симметричные билинейные (полуторалинейные) формы. Взаимно-однозначное соответствие с квадратичными (эрмитовыми) формами. Приведение квадратичной формы к диагональному и каноническому виду (двойные элементарные преобразования матрицы).
3. Закон инерции квадратичной (эрмитовой) формы. Знакоопределённые и полуопределённые формы, их диагональный вид. Критерий Сильвестра.
4. Кососимметричные билинейные функции, приведение их к каноническому виду.

Пространства со скалярным произведением

1. Евклидовы и унитарные пространства. Матрица Грама и её свойства. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца, неравенство треугольника. Метрика. Выражение скалярного произведения в координатах.
2. Ортогональные системы векторов и подпространств. Существование ортонормированных базисов (ОНБ). Изоморфизм евклидовых пространств. Переход от ОНБ к ОНБ. Ортогональные и унитарные матрицы.
3. Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональная проекция. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
4. Преобразование, сопряжённое данному. Его существование и единственность, его матрица в ОНБ. Теорема Фредгольма.
5. Самосопряжённые линейные преобразования. Свойства самосопряжённых преобразований, существование ОНБ из собственных векторов.
6. Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства. Канонический вид унитарного (ортогонального) преобразования.
7. Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве.
8. Квадратичные (эрмитовы) формы в евклидовых (унитарных) пространствах, приведение к диагональному виду. Применение к классификации кривых второго порядка. Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду.

Сопряжённое пространство

1. Линейные функции. Сопряжённое пространство, его размерность. Биортогональный базис. Замена биортогональных базисов. Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряжённого к нему. Канонический изоморфизм евклидова пространства и сопряжённого к нему.
2. Аннулятор подпространства, соответствие между подпространствами V и V^* . Сопряжённое преобразование, его свойства.

Тензоры

1. Полилинейные отображения. Определение тензора типа (p,q) , координатная запись. Изменение компонент тензора при замене базиса.
2. Пространство тензоров типа (p,q) . Основные тензорные операции: умножение, перестановка индексов, свёртка. Метрический тензор и тензоры в евклидовых пространствах.
3. Симметричные и кососимметричные тензоры. Симметризация и альтернирование. Внешние формы.