

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА  
по курсу «Дифференциальные уравнения»  
2 курс, 2021-22 уч.г.

1. **Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнения Бернулли и Риккати (*кроме потока А.М. Бишаева*). Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.

Методы понижения порядка дифференциальных уравнений.

2. **Задача Коши.**

Принцип сжимающих отображений.

Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения  $n$ -го порядка в нормальном виде.

Теоремы о продолжении решения для нормальной системы дифференциальных уравнений.

*Поток А.Е. Умнова: случаи невозможности продолжения решения задачи Коши, теорема о продолжимости решения задачи Коши.*

Непрерывная зависимость от параметров решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений (*без доказательства для потока В.Ю. Дубинской*). Дифференцируемость решения по параметрам, уравнение в вариациях (*без доказательства*).

Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной, теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особое решение.

3. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Фундаментальная система решений и общее решение линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка. Линейное неоднородное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью квазимногочленом. Уравнение Эйлера.

Фундаментальная система решений и общее решение нормальной линейной однородной системы уравнений. Линейная неоднородная система уравнений в случае, когда неоднородность представлена векторным квазимногочленом (*без доказательства*).

Матричная экспонента, ее свойства и применение к решению нормальных линейных систем.

4. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения  $n$ -го порядка в нормальном виде (*без доказательства для потока В.Ю. Дубинской*).

Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем.

Определитель Вронского.

Формула Лиувилля–Остроградского для нормальной линейной однородной системы уравнений и для линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка.

Метод вариации постоянных для линейной неоднородной системы уравнений и для линейного неоднородного уравнения  $n$ -го порядка.

Теорема Штурма и следствия из нее. *Поток О.А. Пырковой: теорема Кнезера.*  
*Поток В.Ю. Дубинской: уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений.*

5. **Автономные системы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Свойства решений и фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейной автономной системы второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерной автономной нелинейной системы. Теорема о выпрямлении траекторий (*без доказательства кроме потока Умнова А.Е.*).

Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия линейной системы.

*Поток А.М. Бишаева: групповое свойство фазовых траекторий автономных систем дифференциальных уравнений. Понятие фазового потока, фазового объема. Теорема Ливилля. Теорема Пуанкаре (без доказательства).*

6. **Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.** Первые интегралы автономных систем. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов. *Применение первых интегралов для понижения порядка системы (кроме потоков В.Ю. Дубинской, А.Е. Умнова, С.Е. Жуковского).*

Общее решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. **Элементы вариационного исчисления.** Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимое условие слабого экстремума.

Задача со свободными концами, необходимое условие слабого экстремума.

Задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, задача для функционалов, содержащих производные высших порядков.

Изопериметрическая задача.